EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 4	9 octobre 2017

Exercice 3.
La première identité suit du théorème de la divergence appliqué à $v\nabla u$. En effet, $\operatorname{div}(v\nabla u) = v\Delta u + \langle \nabla u; \nabla v\rangle$ et donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega [v\Delta u + \langle \nabla u; \nabla v\rangle]\, dxdy &= \int_\Omega \operatorname{div}(v\nabla u)\, dxdy \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle v\nabla u; \nu\rangle \, dl \\ &= \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dl.\end{aligned}$$

Les deux autres identités se déduisent de la première, d'une part en permutant les rôles de u et v et en soustrayant les deux identités obtenues, d'autre part en choisissant $v \equiv 1$.

Exercice 4.

1. Soit $w \in C^2(\overline{\Omega})$ une solution de (1). Par la première identité de Green avec $u = v = w$, on a alors

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx = 0,$$

ce qui implique que $\nabla w = 0$. Donc, comme $w \in C^2(\overline{\Omega})$, w est constante sur chaque composante connexe et puisque $w = 0$ sur $\partial\Omega$, par continuité, w est nulle sur tout $\overline{\Omega}$. Par conséquent, $w \equiv 0$ est l'unique solution de (1).

2. Soient $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ deux solutions de (2) et posons $w := u - v$. On a alors

$$\begin{cases} \Delta w\,(x) = \Delta u(x) - \Delta v(x) = f(x) - f(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ \\ w\,(x) = u(x) - v(x) = \phi(x) - \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Par le point précédent, $w \equiv 0$ est l'unique solution, et donc $u = v$, d'où la conclusion.

Exercice 6.

1. $\operatorname{rot} F = 0$.
2. On a
$$\iint_\Omega \operatorname{rot} F(x,y)dxdy = 0$$
et
$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) d\theta = 2\pi \neq 0.$$
Mais cela ne contredit pas le théorème de Green parce que F n'est pas continue en zéro, et donc $F \notin C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$.

Exercice 7.
En notant $F = F(x_1, x_2, x_3)$ et $f = f(y_1, y_2, y_3)$, on a

$$\frac{\partial F^1}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial y_3}, \quad \frac{\partial F^2}{\partial x_2} = 3x_2^2 \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial F^3}{\partial x_3} = 2x_2^2 x_3 \frac{\partial f}{\partial y_1} + 2x_1^2 x_3 \frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

En sommant, on obtient le résultat.