EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 3	2 octobre 2017

Exercice 1.
En passant aux coordonnées polaires $x_1 = r\cos(\theta)$, $x_2 = r\sin(\theta)$, avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, nous avons directement

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)}dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\right)d\theta \\
&= 2\pi\left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_{r=0}^{r=\infty} \\
&= \pi(1-\lim_{r\to\infty} e^{-r^2}) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx &= \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2}dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2}dx_2\right)} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)}dx_1\,dx_2} \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. 1. Un calcul nous donne

$$\nabla(|x|) = \frac{x}{|x|}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Par conséquent,

$$\nabla(|x|^p) = p|x|^{p-1}\nabla(|x|) = p|x|^{p-2}x.$$

Remarquons que cette fonction est bien définie en 0 si $p \geq 2$.

2. Notons,

$$\begin{aligned}
h_p &\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ :\ u \mapsto h_p(u) \\
G &\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ :\ v \mapsto G(v) \\
\gamma &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\ :\ t \mapsto \gamma(t) = tx,
\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$f_p = \frac{1}{p} h_p \circ G \circ \gamma.$$

Ainsi, les formules classiques de dérivation d'un produit de composition donnent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f_p\left(t\right) =& \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_p}{\partial u_i}\left(G\left(\gamma\left(t\right)\right)\right)\frac{dG^i\circ\gamma}{dt}\left(t\right)\\ =& \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_p}{\partial u_i}\left(G\left(\gamma\left(t\right)\right)\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial G^i}{\partial v_j}\left(\gamma\left(t\right)\right)\frac{d\gamma^j}{dt}\left(t\right).\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\partial h_p}{\partial u_i}\left(u\right) = p|u|^{p-2}u_i \qquad \text{et} \qquad \frac{d\gamma^j}{dt}\left(t\right) = x_j.$$

On obtient donc,

$$\frac{d}{dt}f_p\left(t\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|G\left(tx\right)\right|^{p-2}G^i\left(tx\right)\frac{\partial G^i}{\partial v_j}\left(tx\right)x_j.$$

Exercice 4.
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexe et $x, y \in \Omega$ et définissons $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

$$\alpha(t) := tx + (1-t)y.$$

Comme Ω est convexe, alors

$$\alpha([0,1]) = [x,y] \subset \Omega,$$

et donc Ω est connexe par arc.

Exercice 5.

1. Les ensembles

   $$S_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leqslant x, x > 0\},\ S_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leqslant -x, x < 0\}$$

   sont ouverts dans S ; en effet

   $$S_1 = S \cap \{x > 0\} \quad \text{et} \quad S_1 = S \cap \{x < 0\}.$$

   De plus, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ et $S = S_1 \cup S_2$. Par conséquent S n'est pas connexe.

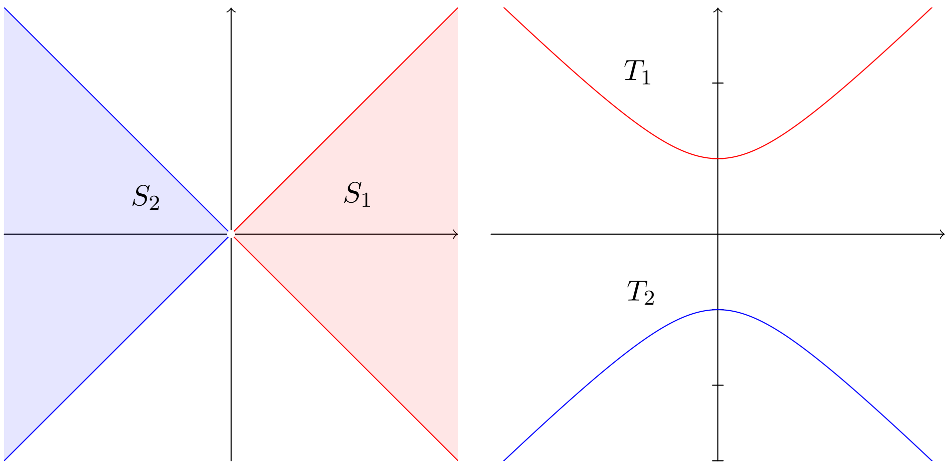
2. Les ensembles

$$T_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 1, y > 0\},\ T_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 1, y < 0\}$$

sont ouverts dans T ; en effet

$$T_1 = T \cap \{y > 0\} \quad \text{et} \quad T_1 = T \cap \{y < 0\}.$$

De plus, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ et $T = T_1 \cup T_2$. Par conséquent T n'est pas connexe.



Exercice 7.
(i) Le domaine de définition est

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\right\}$$

qui est connexe mais pas simplement connexe.

(ii) On a

$$\begin{aligned}\mathrm{rot} F &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x(x^2+y^2)^{-n}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[y(x^2+y^2)^{-n}\right] \\ &= x\left[-2ny(x^2+y^2)^{-n-1}\right] - y\left[-2nx(x^2+y^2)^{-n-1}\right] = 0.\end{aligned}$$

(iii) On cherche f tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x(x^2+y^2)^{-n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y(x^2+y^2)^{-n}.$$

On a donc

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2(1-n)}(x^2+y^2)^{1-n} & \text{si } n \geq 2. \end{cases} \qquad \spadesuit$$