| EPFL - Printemps 2018 | Prof. B. Dacorogna |
|---|---|
| **Analyse IV (MA)** | **Corrigé** |
| Série 21 | 9 avril 2018 |

**Exercice 1.**
Fixons $\tau > 0$. Par le théorème 3.27 du cours, il existe $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)|^p dx \le \frac{\tau}{3^p},$$

et donc, pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x+\epsilon) - f(x+\epsilon)|^p dx \le \frac{\tau}{3^p}.$$

Soit $[a,b]$ tel que $\operatorname{supp}(g) \subset [a,b]$. Alors, pour $0 < |\epsilon| < 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x+\epsilon) - g(x)|^p dx = \int_{a-1}^{b+1} |g(x+\epsilon) - g(x)|^p dx.$$

Nous voulons appliquer le théorème de la convergence dominée. Posons

$$G_\epsilon(x) := |g(x+\epsilon) - g(x)|^p, \quad x \in [a-1, b+1].$$

Alors $G_\epsilon \in L^1(a-1, b+1)$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} G_\epsilon(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

et

$$|G_\epsilon(x)| \le ||g(x+\epsilon)| + |g(x)||^p \le 2^p \, \|g\|^p_{C^0(\mathbb{R})} \in L^1(a-1, b+1)$$

Les hypothèses du théorème de la convergence dominée sont vérifiées, alors pour $\epsilon$ suffisamment petit

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x+\epsilon) - g(x)|^p dx \ \le \ \frac{\tau}{3^p}.$$

Combinant les trois estimations on a que, pour $\epsilon$ suffisamment petit

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |f(x+\epsilon) - f(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(x+\epsilon) - g(x+\epsilon) + g(x+\epsilon) - g(x) + g(x) - f(x)|^p dx \\
&\le 3^{p-1} \left[ \int_{\mathbb{R}} |f(x+\epsilon) - g(x+\epsilon)|^p dx + \int_{\mathbb{R}} |g(x+\epsilon) - g(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)|^p dx \right] \\
&\le \tau.
\end{aligned}$$

Puisque $\tau$ est arbitraire, il s'ensuit immédiatemment le résultat.

**Remarque.** Alternativement, la troisième estimation peut être obtenue en utilisant le fait que $g$ est uniformément continue sur son support.

**Exercice 2.**

1. Soit $f = \chi_A$. Puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a par l'exercice 1 que
$$\lim_{\epsilon \to 0} \int |\chi_A(x-\epsilon) - \chi_A(x)| dx = 0.$$
Puisque
$$|\chi_A(x-\epsilon) - \chi_A(x)| = \chi_{[(A+\epsilon)\setminus A] \cup [A \setminus (A+\epsilon)]}(x),$$
il s'ensuit que
$$\int |\chi_A(x-\epsilon) - \chi_A(x)| dx = \text{mes}([(A+\epsilon)\setminus A] \cup [A \setminus (A+\epsilon)]).$$
Remarquant que
$$\text{mes}((A+\epsilon)\setminus A) \leq \text{mes}([(A+\epsilon)\setminus A] \cup [A \setminus (A+\epsilon)])$$
on obtient immédiatement le résultat.

2. Soit
$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1/2).$$
Alors pour tout $0 < \epsilon < 1/2$,
$$(A+\epsilon)\setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n+1/2, n+1/2+\epsilon),$$
d'où, par additivité de la mesure,
$$\text{mes}((A+\epsilon)\setminus A) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon = \infty.$$

3. Soit $A \subset [-1,2]$ l'ensemble non-mesurable construit dans le cours (cf. théorème 2.18). Cet ensemble a en particulier la propriété suivante:
$$(A+\epsilon) \cap A = \emptyset \quad \text{pour tout } \epsilon \in \mathbb{Q} \cap [-1,1] \setminus \{0\}.$$
Il s'ensuit directement que, pour $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap [-1,1] \setminus \{0\}$,
$$\text{mes}^*((A+\epsilon)\setminus A) = \text{mes}^*(A+\epsilon) = \text{mes}^*(A).$$
Remarquant que $\text{mes}^*(A) > 0$ (sinon $A$ serait mesurable), il vient donc que
$$\lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon \in \mathbb{Q} \cap [-1,1] \setminus \{0\}}} \text{mes}^*((A+\epsilon)\setminus A) = \text{mes}^*(A) \neq 0,$$
d'où le résultat.

**Exercice 3.**
Par l'exercice 4 de la série 20, nous avons le droit d'effectuer le changement de variable

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(x+T)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx,$$

où nous avons utilisé la périodicité $f(x+T) = f(x)$. En réarrangeant les bornes des intégrales, nous avons donc

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(x)\,dx &= \int_a^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx \\
&= \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\
&= \int_0^T f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Puisque $|f|$ est aussi $T$-périodique, on a également

$$\int_0^T |f|(x)dx = \int_a^{a+T} |f|(x)dx,$$

et donc $f \in L^1(a, a+T)$.

**Exercice 4.**
Il suffit d'utiliser les formules trigonométriques

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y),$$

$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y),$$

$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y).$$

**Exercice 5.**
Pour alléger les notations, on ne note pas la dépendance à $[a, b]$.

1. Soient $f, g \in C^{0,\alpha}$ et $a \in \mathbb{R}$. Il est trivial de voir que $\|f\|_{C^{0,\alpha}} = 0$ si et seulement si $f = 0$ et que

$$\|af\|_{C^{0,\alpha}} = |a|\|f\|_{C^{0,\alpha}}.$$

   Il ne reste plus qu'à montrer que

$$\|f+g\|_{C^{0,\alpha}} \leq \|f\|_{C^{0,\alpha}} + \|g\|_{C^{0,\alpha}}.$$

On a
$$\|f+g\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^0} + \|g\|_{C^0}$$
puisque $\|\cdot\|_{C^0}$ est une norme. Ensuite
$$\frac{|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} + \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq [f]_{C^{0,\alpha}} + [g]_{C^{0,\alpha}}$$
et donc
$$[f+g]_{C^{0,\alpha}} \leq [f]_{C^{0,\alpha}} + [g]_{C^{0,\alpha}},$$
d'où le résultat.

2. Comme
$$\begin{aligned}
[fg]_{C^{0,\alpha}} &\leq \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)g(x)-f(y)g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&= \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq \|f\|_{C^0} \sup_{x\neq y} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} + \|g\|_{C^0} \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha},
\end{aligned}$$
on déduit que
$$\begin{aligned}
\|fg\|_{C^{0,\alpha}} &\leq \|f\|_{C^0}\,\|g\|_{C^0} + \|f\|_{C^0}\,[g]_{C^{0,\alpha}} + \|g\|_{C^0}\,[f]_{C^{0,\alpha}} \\
&\leq \|f\|_{C^{0,\alpha}}\,\|g\|_{C^{0,\alpha}}\ .
\end{aligned}$$

3. 
- Si $f \in C^{0,\alpha}([a,b])$, on a alors
$$\lim_{x\to y} |f(x)-f(y)| \leq C \lim_{x\to y} |x-y|^\alpha = 0, \quad \forall\, y \in [a,b],$$
d'où $C^{0,\alpha} \subset C^0$.
- Montrons que $C^{0,\beta} \subset C^{0,\alpha}$. On a
$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\ x\neq y}} \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\} &\leq \sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\ x\neq y}} \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|\,|x-y|^{\beta-\alpha}}{|x-y|^\beta} \right\} \\
&\leq [f]_{C^{0,\beta}}\,(b-a)^{\beta-\alpha}\,.
\end{aligned}$$
Il s'ensuit alors
$$\begin{aligned}
\|f\|_{C^{0,\alpha}} &= \|f\|_{C^0} + [f]_{C^{0,\alpha}} \leq \|f\|_{C^0} + [f]_{C^{0,\beta}}\,(b-a)^{\beta-\alpha} \\
&\leq (1+(b-a)^{\beta-\alpha})\|f\|_{C^{0,\beta}}.
\end{aligned}$$

- L'inclusion $C^{0,1} \subset C^{0,\beta}$ est un cas particulier du point précédent.

- Montrons que $C^1 \subset C^{0,1}$. Soient $x, y \in [a, b]$, il vient alors

  $$f(x)-f(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f\left(y + t\left(x-y\right)\right) dt = \int_0^1 f'\left(y + t\left(x-y\right)\right)\left(x-y\right) dt.$$

  On a donc que

  $$\left|f(x)-f(y)\right| \leq \max_{z\in[x,y]} \left|f'(z)\right| \left|x-y\right| \leq \left\|f\right\|_{C^1} \left|x-y\right|.$$

**Exercice 6.**

1. On commence par remarquer que pour tout $\alpha \in [0,1]$, on a

   $$g\left(t\right) = 1 - t^\alpha - \left(1-t\right)^\alpha \leq 0 \ \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

   Ceci se montre facilement en remarquant que $g$ est convexe dans $[0,1]$ et que $g\left(0\right) = g\left(1\right) = 0$. On obtient ensuite

   $$\begin{aligned} \sup_{\substack{x\neq y \\ x,y\in[0,1]}} \left\{ \frac{|x^\alpha - y^\alpha|}{|x-y|^\alpha} \right\} &= \sup_{\substack{x>y \\ x,y\in[0,1]}} \left\{ \frac{|x^\alpha - y^\alpha|}{|x-y|^\alpha} \right\} = \sup_{\substack{x>y \\ x,y\in[0,1]}} \left\{ \frac{|x^\alpha|\,|(1-(y/x)^\alpha|}{|x^\alpha|\,|1-y/x|^\alpha} \right\} \\ &= \sup_{t\in(0,1)} \left\{ \frac{1-t^\alpha}{(1-t)^\alpha} \right\} = 1 \end{aligned}$$

   et donc $f_\alpha \in C^{0,\alpha}\left([0,1]\right)$.

2. Il est trivial de voir que $f$ est continue. Si elle était Hölder continue, il existerait $0 < \alpha \leq 1$ et une constante $C_\alpha > 0$ tels que, pour tout $x \in (0, 1/2)$,

   $$\frac{-1}{\log x} = \left|f\left(x\right) - f\left(0\right)\right| \leq C_\alpha x^\alpha,$$

   autrement dit

   $$x^\alpha \log x \leq \frac{-1}{C_\alpha}, \quad \forall\, x \in (0, 1/2)$$

   ce qui est clairement impossible, car

   $$\lim_{x\to 0} x^\alpha \log x = 0.$$

**Exercice 7.**

1. Sans perte de généralité supposons que $a_n \to 0$. Comme la suite converge, on a que

$$\gamma = \sup \{|a_n|\} < \infty$$

et que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $N = N(\epsilon)$ tel que

$$|a_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ pour tout } n \geq N.$$

On a ainsi pour $n \geq N$

$$\begin{aligned} |s_n| &\leq \frac{1}{n}[|a_1| + \cdots + |a_N|] + \frac{1}{n}[|a_{N+1}| + \cdots + |a_n|] \\ &\leq \gamma \frac{N}{n} + \frac{\epsilon}{2n}(n - N) \\ &\leq \gamma \frac{N}{n} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq \max \left\{N, \frac{2\gamma N}{\epsilon}\right\}$, on obtient le résultat souhaité, à savoir

$$|s_n| \leq \gamma \frac{N}{n} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

2. La suite $a_n = (-1)^n$ ne converge pas au sens usuel mais elle converge au sens de Cesaro vers 0.