EPFL - Printemps 2018	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Corrigé**
Série 20	27 mars 2018

Exercice 1.
Pour $\nu \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_\nu(x) := \min\{|f(x)|, \nu\}.$$

Le théorème de la convergence monotone (ou le théorème de convergence dominée) implique que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver ν suffisamment grand pour que

$$\int_a^b (|f(x)| - f_\nu(x))\, dx \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Choisissons alors $\delta = \epsilon/2\nu$. On a donc que, pour $\operatorname{mes} E \leq \delta$,

$$\int_E |f(x)|\, dx = \int_E f_\nu(x)\, dx + \int_E (|f(x)| - f_\nu(x))\, dx \leq \nu \operatorname{mes} E + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

Exercice 2.
On sépare la preuve en deux étapes.

Etape 1 On montre les suggestions.

1. Une fonction f est concave si et seulement si son opposé est convexe. Par l'exercice 2, série 19, si $f \in C^2$, alors f est concave si et seulement si $f'' \leq 0$. La concavité du log découle donc directement de

$$\log''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0, \quad \forall\, x > 0.$$

2. Soient $a, b > 0$ et $1/p + 1/p' = 1$, avec $1 < p < \infty$. Comme la fonction log est concave, il vient que

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'} = \log ab$$

et donc, par croissance et injectivité de log sur $\mathbb{R}_+^*$, on conclut

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \geq ab.$$

Etape 2. Si $\|f\|_{L^p} = 0$ ou $\|g\|_{L^{p'}} = 0$, l'inégalité est triviale car alors $f = 0$ ou $g = 0$ p.p. et donc $fg = 0$ p.p. et ainsi $\|fg\|_{L^1} = 0$.

(i) Supposons donc que $\|f\|_{L^p} > 0$ et $\|g\|_{L^{p'}} > 0$ et commençons par supposer que $1 < p < \infty$. Posons

$$a = \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^p}}\right)^p \quad \text{et} \quad b = \left(\frac{|g|}{\|g\|_{L^{p'}}}\right)^{p'}.$$

On déduit par l'identité de Young (cf. Etape 1) que

$$\frac{|f\,g|}{\|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^p}}\right)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{|g|}{\|g\|_{L^{p'}}}\right)^{p'}$$

et donc

$$\frac{\int_a^b |f\,g|}{\|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{1}{p}\frac{\int_a^b |f|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{p'}\frac{\int_a^b |g|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

et ainsi

$$\|f\,g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{p'}} \,.$$

(ii) Discutons maintenant le cas $p = 1$ ou ∞ (sans perte de généralité supposons $p = 1$ et donc $p' = \infty$). On a tout de suite le résultat car

$$|f\,g| = |f|\,|g| \leq |f|\,\|g\|_{L^\infty} \quad \text{p.p.}$$

et donc

$$\int_a^b |f\,g| = \|f\,g\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^\infty}\int_a^b |f| = \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^\infty} \,.$$

Ceci termine la démonstration.

Exercice 3.

1. Soient $f, g \in L^p(a,b)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Utilisant le fait que (par convexité de la fonction $x \to x^p$), pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

   $$|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p),$$

   il est trivial de voir que

   $$\lambda f + \mu g \in L^p(a,b),$$

   ce qui implique directement que $L^p(a,b)$ est un espace vectoriel.

2. Soit $f \in L^q(a,b)$. Supposons pour commencer que $q < \infty$. Il vient, par l'inégalité de Hölder, que

$$\begin{aligned}\int_a^b |f|^p &= \int_a^b |f|^p|1| \leq \left(\int_a^b (|f|^p)^{q/p}\right)^{p/q}\left(\int_a^b |1|\right)^{1-p/q} \\ &= (\|f\|_{L^q})^p(b-a)^{1-p/q}.\end{aligned}$$

On obtient donc finalement que

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q}(b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Supposons à présent que $q = \infty$. Dans ce cas

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b \|f\|_{L^\infty}^p\right)^{1/p} = (b-a)^{1/p}\|f\|_{L^\infty}. \quad (1)$$

3. Utilisant (1), il vient immédiatement que

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

Pour montrer l'autre inégalité, fixons $0 < \epsilon < \|f\|_{L^\infty}$ et considérons l'ensemble

$$A_\epsilon := \{x \in (a,b) : \ |f(x)| \geq \|f\|_{L^\infty} - \epsilon\}.$$

Alors $\mathrm{mes}(A_\epsilon) > 0$; en effet, si ce n'était pas le cas, nous aurions

$$|f(x)| < \|f\|_{L^\infty} - \epsilon \quad \text{presque partout sur } (a,b),$$

ce qui contredirait la définition de $\|f\|_{L^\infty}$. Nous avons donc

$$\int_a^b |f|^p \geq \int_{A_\epsilon} |f|^p \geq \mathrm{mes}(A_\epsilon)(\|f\|_{L^\infty} - \epsilon)^p > 0,$$

d'où

$$\|f\|_{L^p} \geq \mathrm{mes}(A_\epsilon)^{1/p}(\|f\|_{L^\infty} - \epsilon).$$

Ainsi

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_\infty - \epsilon.$$

Puisque ϵ est arbitraire, on a finalement que

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^\infty},$$

d'où le résultat.

Exercice 4.

1. Par divers résultats du cours (invariance de la mesure par translation), on peut supposer sans perte de généralité que $b = 0$.

   Etape 1. On montre d'abord que, pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ on a
   $$\text{mes}^*(aE) = |a| \, \text{mes}^*(E).$$
   Supposons pour commencer que $a > 0$. On a
   $$\begin{aligned} \text{mes}^*(aE) &= \inf \left\{ \sum_n (b_n - a_n) : aE \subset \bigcup_n (a_n, b_n) \right\} \\ &= a \inf \left\{ \sum_n \left(\frac{b_n}{a} - \frac{a_n}{a} \right) : E \subset \bigcup_n \left(\frac{a_n}{a}, \frac{b_n}{a} \right) \right\} = a \, \text{mes}^*(E). \end{aligned}$$
   Pour finir si $a < 0$, il vient
   $$\begin{aligned} \text{mes}^*(aE) &= \inf \left\{ \sum_n (b_n - a_n) : aE \subset \bigcup_n (a_n, b_n) \right\} \\ &= |a| \inf \left\{ \sum_n \left(\frac{a_n}{a} - \frac{b_n}{a} \right) : E \subset \bigcup_n \left(\frac{b_n}{a}, \frac{a_n}{a} \right) \right\} = |a| \, \text{mes}^*(E). \end{aligned}$$

   Etape 2. Montrons maintenant que
   $$E \subset \mathbb{R} \text{ mesurable, } a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad aE \text{ mesurable.}$$
   Soit $\epsilon > 0$. Puisque E est mesurable, il existe un ouvert $O \supset E$ tel que
   $$\text{mes}^*(O \setminus E) \leq \frac{\epsilon}{|a|}.$$
   Posons $O' := aO$. Alors par l'étape 1,
   $$\text{mes}^*(O' \setminus aE) = \text{mes}^*(a(O \setminus E)) = |a| \, \text{mes}^*(O \setminus E) \leq \epsilon,$$
   ce qui montre que aE est mesurable, et donc
   $$\text{mes}(aE) = |a| \, \text{mes}(E).$$

2. On commence par montrer le résultat lorsque f est mesurable simple et non négative. Il s'ensuit que g est mesurable simple non négative. Il existe donc $c_1, \cdots, c_n \geq 0$ et $A_1, \cdots, A_n \subset E$ des ensembles mesurables tels que $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$ avec
   $$g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}.$$

De plus, il est élémentaire de voir que f vaut

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{aA_i+b}.$$

Par le point 1) on a que

$$\mathrm{mes}(aA_i + b) = |a| \,\mathrm{mes}(A_i),$$

on obtient que

$$\int_F f = \sum_{i=1}^{n} c_i |a| \,\mathrm{mes}(A_i) = |a| \int_E g, \tag{2}$$

d'où le résultat.

Lorsque f est arbitraire, on écrit $f = f^+ - f^-$. Utilisant un théorème du cours, on sait qu'il existe $\phi_\nu^+ \nearrow f^+$ et $\phi_\nu^- \nearrow f^-$ deux suites de fonctions simples non négatives. En appliquant l'égalité (2) et le théorème de la convergence monotone, on obtient directement le résultat recherché.

Exercice 5.

1. Si $1 \leq p < \infty$,

$$\|f_\nu\|_{L^p} = \mathrm{mes}(I_\nu)^{1/p} = \frac{1}{2^{h(\nu)/p}} \to 0,$$

et donc

$$f_\nu \to 0 \text{ dans } L^p(0,1).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la collection d'intervalles $\{I_{2^n}, I_{2^n+1}, \dots, I_{2^{n+1}-1}\}$ forme une partition de $[0,1]$. Il en découle immédiatement que, pour tout $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe $\nu_k^0, \nu_k^1 > k$ tels que

$$x \notin I_{\nu_k^0} \quad \text{et} \quad x \in I_{\nu_k^1}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, il existe deux sous-suite de $\{f_\nu\}$, notées $\{f_k^0\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{f_k^1\}_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{k \to \infty} f_k^0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \to \infty} f_k^1(x) = 1$$

d'où

$$\lim_{\nu \to \infty} f_\nu(x) \text{ n'existe pas.}$$

3. Considérons la sous-suite

$$\tilde{f}_k := f_{2^k} = \chi_{[0,2^{-k}]}, \quad k \geq 0.$$

Alors pour tout $x > 0$, il existe $k \geq 1$ tel que $x > 2^{-k}$, d'où

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k(x) = 0.$$

Si $x = 0$, alors on a trivialement

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{f}_k(0) = 1.$$

Conclusion,

$$\tilde{f}_k \to 0 \text{ presque partout sur } [0,1].$$