EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 1	27 septembre 2017

Exercice 5.
Reporté à la série 2.

Exercice 7. 1. On calcule

$$\operatorname{Jac}(u)(r,\theta) = \det \nabla u(r,\theta) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} = r.$$

L'aire du disque de rayon R

$$\Omega_R = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < R\right\}$$

est donnée par

$$\int_{\Omega_R} dx_1\, dx_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\, dr = \pi R^2.$$

2. On calcule

$$\begin{aligned} \operatorname{Jac}(u)(r,\theta,\phi) &= \det \nabla u(r,\theta,\phi) \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\phi) & 0 & -r\sin(\phi) \end{pmatrix} = -r^2\sin(\phi). \end{aligned}$$

Le volume de la sphère de rayon R

$$\Omega_R = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R\right\}$$

est donné par

$$\int_{\Omega_R} dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^R r^2 \sin(\phi)\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3. On calcule

$$\operatorname{Jac}(u)(r,\theta,z) \det \nabla u(r,\theta,z) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Le volume du cylindre de rayon R et de hauteur H

$$\Omega_{R,H} = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < R,\ 0 < x_3 < H\right\}$$

est donné par

$$\int_{\Omega_{R,H}} dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_0^R r\, dr = \pi R^2 H.$$