EPFL - Printemps 2018	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Corrigé**
Série 19	20 mars 2018

Exercice 1.

1. On doit montrer que pour tout f, g mesurables non négatives on a

$$\int (f+g) = \int f + \int g \tag{1}$$

Nous procédons en deux étapes.

Etape 1. On commence d'abord par montrer (1) pour des fontions simples, mesurables et non négatives φ et ψ. Il existe donc $A_1, \cdots, A_n$ et $B_1, \cdots, B_m$ des ensembles mesurables ainsi que $a_1, \cdots, a_n \geq 0$ et $b_1, \cdots, b_m \geq 0$ tels que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{j=i}^{m} b_j \chi_{B_j}.$$

Il s'ensuit directement que

$$\varphi + \psi = \sum_{1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq m} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Utilisant le fait que les A_i et B_j sont des partitions de $\mathbb{R}$, alors

$$\operatorname{mes} A_i = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{mes}(A_i \cap B_j)\,, \quad \operatorname{mes} B_j = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes}(A_i \cap B_j)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int (\varphi + \psi) &= \sum_{1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq m} (a_i + b_j) \operatorname{mes}(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq m} a_i \operatorname{mes}(A_i \cap B_j) + \sum_{1 \leq i \leq n;\ 1 \leq j \leq m} b_j \operatorname{mes}(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{mes}(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \operatorname{mes}(B_j) \\
&= \int \varphi + \int \psi.
\end{aligned}$$

Etape 2. Pour finir on montre (1) pour des fonctions f, g mesurables non négatives. Utilisant un théorème du cours on sait qu'il existe $\{\varphi_\nu\}$, $\{\psi_\nu\}$ deux suites de fonctions mesurables simples non négatives telles que

$$\varphi_\nu \nearrow f \text{ et } \psi_\nu \nearrow g.$$

On a alors que $\varphi_\nu + \psi_\nu \nearrow f + g$. Utilisant le point précédent et le théorème de la convergence monotone, on obtient que

$$\int (f+g) = \int \lim_{\nu\to\infty} (\varphi_\nu + \psi_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \int (\varphi_\nu + \psi_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \int \varphi_\nu + \lim_{\nu\to\infty} \int \psi_\nu = \int f + \int g;$$

d'où le résultat.

2. Puisque $f_\nu \geq 0$, alors

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \nearrow \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu.$$

Par le théorème de la convergence monotone et le point (1), on a directememnt

$$\int \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \int f_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_\nu.$$

Exercice 2.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Si $x = y$, l'inégalité est triviale. Soient $x \neq y$ et $0 < \lambda < 1$. Par convexité de f,

$$\frac{1}{\lambda}\left[f\left(y + \lambda\left(x - y\right)\right) - f\left(y\right)\right] \leq f\left(x\right) - f\left(y\right). \tag{2}$$

Puisque

$$f'(y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f\left(y + \lambda(x-y)\right) - f(y)}{\lambda(x-y)},$$

alors par (2),

$$f'(y)(x-y) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left[f\left(y + \lambda\left(x - y\right)\right) - f\left(y\right)\right] \leq f\left(x\right) - f\left(y\right).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a par hypothèse que,

$$f\left(x\right) \geq f\left(\lambda x + \left(1 - \lambda\right) y\right) + \left(1 - \lambda\right) f'\left(\lambda x + \left(1 - \lambda\right) y\right)\left(x - y\right)$$
$$f\left(y\right) \geq f\left(\lambda x + \left(1 - \lambda\right) y\right) - \lambda f'\left(\lambda x + \left(1 - \lambda\right) y\right)\left(x - y\right).$$

Multipliant la première inégalité par λ et la deuxième par $1-\lambda$, puis sommant les résultats obtenus, on obtient que

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y);$$

et donc f est convexe.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(y)+f'(y)(x-y) \\ f(y) &\geq f(x)+f'(x)(y-x). \end{aligned}$$

On combinant ces deux inégalités, on obtient directement (iii).

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose que $x \geq y$ (l'autre cas est en tout point semblable). Par hypothèse,

$$[f'(t)-f'(y)](t-y)\geq 0 \quad \text{pour tout } t\in\mathbb{R}$$

et donc

$$f'(t)-f'(y)\geq 0 \quad \text{pour tout } t\geq y.$$

Intégrant il vient alors

$$0\leq \int_y^x (f'(t)-f'(y))dt = f(x)-f(y)-(x-y)f'(y),$$

d'où le résultat.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $y = x + h$ avec $h \neq 0$, alors nous avons immédiatement

$$\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\geq 0.$$

En passant à la limite,

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\geq 0.$$

$(iv) \Rightarrow (iii)$: Soient $x \leq y$ (l'autre cas est en tout point semblable). Alors

$$0\leq \int_x^y f''(t)dt = f'(y)-f'(x),$$

d'où

$$\left(f'(y)-f'(x)\right)(y-x)\geq 0.$$

Exercice 3.

1. Par définition d'une suite régularisante, on remarque d'abord que pour tout $\nu \geq 1$,

$$\mathrm{supp}(\phi) \subset [-1, 1] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{supp}(\phi_\nu) \subset [-1/\nu, 1/\nu].$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le support de la fonction $y \to \phi_\nu(x - y)$ est inclus dans l'intervalle $[x - 1/\nu,\ x + 1/\nu]$, et donc on peut écrire

$$f_\nu(x) = \int_{x-\frac{1}{\nu}}^{x+\frac{1}{\nu}} \varphi_\nu(x - y)\, f(y)\, dy. \tag{3}$$

Puisque $\varphi_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors on peut dériver à l'intérieur de l'intégrale :

$$f_\nu^{(k)}(x) = \int_{x-\frac{1}{\nu}}^{x+\frac{1}{\nu}} \varphi_\nu^{(k)}(x - y)\, f(y)\, dy, \quad \forall\ k \geq 1,$$

d'où $f_\nu \in C^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $\nu \geq 1$.

Montrons que le support de f_ν est compact dans (a, b) dès que ν est suffisamment grand. Il est évident que $f \in C_0(a, b)$ si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$f(x) = 0, \quad \forall\ x \in]-\infty\,, a + \epsilon\,[\cup]\,b - \epsilon\,, \infty\,[. \tag{4}$$

Nous allons montrer que

$$f_\nu(x) = 0, \quad \forall\ x \in \Big]-\infty\,, a + \frac{\epsilon}{2}\Big[\cup \Big]\,b - \frac{\epsilon}{2}\,, \infty\Big[\tag{5}$$

pour tout ν suffisamment grand pour que $1/\nu < \epsilon/2$, ce qui est équivalent à $f_\nu \in C_0^\infty(a, b)$. Soit $x < a + \epsilon/2$. Alors pour tout $y \in [x - 1/\nu,\ x + 1/\nu]$, nous avons

$$y \leq x + \frac{1}{\nu} < a + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = a + \epsilon,$$

d'où, par (3) et (4), $f_\nu(x) = 0$. De même, $f_\nu(x) = 0$ si $x > b - \epsilon/2$, ce qui montre (5).

Remarque: On peut également résoudre l'éxercice en montrant et utilisant la formule plus générale

$$\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g).$$

2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu(x-y)\,dx = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\nu(x-y)\right)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(z\right)\,dz = 1,$$

où on a effectué le changement de variable $z = \nu(x-y)$. Par conséquent, en permutant l'ordre d'intégration,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\nu(x)|\,dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu(x-y)\,|f(y)|\,dy\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu(x-y)\,dx\right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,dy.
\end{aligned}$$

3. Nous allons montrer que pour tout $\epsilon > 0$, alors

$$|f_\nu\left(x\right) - f\left(x\right)| \leq \epsilon, \quad \forall\, x \in [a,b],$$

dès que ν est suffisamment grand.

Comme f est continue sur un compact, elle est uniformément continue et donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta\left(\epsilon\right) > 0$ tel que

$$|y| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f\left(x-y\right) - f\left(x\right)| \leq \epsilon,\ \forall\, x \in [a,b]$$

Soit $\nu > 1/\delta$; en utilisant $\int \varphi = \int \varphi_\nu = 1$ et le fait que $\mathrm{supp}(\varphi_\nu) \subset [-1/\nu, 1/\nu]$, alors on a

$$\begin{aligned}
|f_\nu\left(x\right) - f\left(x\right)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)|\,\varphi_\nu\left(y\right)\,dy \\
&= \int_{-1/\nu}^{1/\nu} |f(x-y) - f(x)|\,\varphi_\nu\left(y\right)\,dy \\
&\leq \epsilon \int_{-1/\nu}^{1/\nu} \varphi_\nu\left(y\right)\,dy \\
&= \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, toute fonction C_0 peut être uniformément approchée par une suite de fonctions C_0^∞, c'est-à-dire l'espace C_0^∞ est dense dans C_0.

Exercice 4.

1. Comme chaque P_k est fermé, on a que $P = \bigcap_{k=0}^{\infty} P_k$ est fermé et donc compact puisque borné par $[0,1]$.

2. On commence par remarquer que P est mesurable puisque chaque P_k l'est. Ensuite, puisque P_k est composé de 2^k intervalles disjoints de longueur $(1/3)^k$, on a que

$$\text{mes}(P_k) = (2/3)^k \to 0 \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Utilisant l'exercice 1(iv) de la série 17, on a que

$$\text{mes}(P) = \lim_{k\to\infty} \text{mes}(P_k) = 0.$$

3. Posons

$$A := \left\{ a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0, 2\} \right\},$$

et montrons par la double inculsion que

$$A = P.$$

($\subseteq$) Soit $a = 0, a_1 a_2 \cdots \in A$ et montrons que $a \in P_k$ pour tout $k \geq 1$. Posons

$$\widetilde{a}_k := \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n}.$$

Par le point 1 de l'exercice 5 de la série 17, nous savons que

$$0 \leq a - \widetilde{a}_k \leq \frac{1}{3^k}, \quad \forall\, k \geq 1,$$

d'où

$$a \in [\widetilde{a}_k, \widetilde{a}_k + 1/3^k].$$

Nous allons montrer par induction que cet intervalle appartient à P_k.

Pour $k = 1$, par définition de A, on a soit $\widetilde{a}_1 = 0$, soit $\widetilde{a}_1 = 2/3$. Puisque

$$P_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1],$$

alors on a bien

$$[\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_1 + 1/3] \subset P_1.$$

Supposons que

$$[\widetilde{a}_k, \widetilde{a}_k + 1/3^k] \subset P_k$$

pour un certain $k \geq 1$ et montrons cette inclusion pour $k + 1$. Par construction, l'intervalle $[\widetilde{a}_k, \widetilde{a}_k + 1/3^k] \subset P_k$ engendre deux intervalles de P_{k+1} :

$$[\widetilde{a}_k, \widetilde{a}_k + 1/3^{k+1}] \cup [\widetilde{a}_k + 2/3^{k+1}, \widetilde{a}_k + 1/3^k] \subset P_{k+1}.$$

Puisque
$$\widetilde{a}_{k+1} = \widetilde{a}_k + \frac{a_{k+1}}{3^{k+1}}$$
alors, par définition de A, on a soit $\widetilde{a}_{k+1} = \widetilde{a}_k$, soit $\widetilde{a}_{k+1} = \widetilde{a}_k + 2/3^{k+1}$, d'où
$$[\widetilde{a}_{k+1}, \widetilde{a}_{k+1} + 1/3^{k+1}] \subset P_{k+1}.$$

($\supseteq$) Soit $a \in P$. On définit alors la suite $\{a_i\}$ de la manière suivante:
$$\begin{cases} a_1 = 0, & \text{si } a \in [0, 1/3]; \\ a_1 = 2, & \text{si } a \in [2/3, 1]. \end{cases}$$
et ainsi de suite a_k valant 0 si a se trouve dans le premier tiers de l'intervalle de P_{k-1} dans lequel se trouve a et 2 si a se trouve dans le troisième tiers de ce même intervalle. Par définition même de la suite a_i on a que
$$0 \leq a - \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} \leq \frac{1}{3^k};$$
il s'ensuit directement que $a = 0, a_1 a_2 \cdots \in A$.

4. On utilise la méthode classique dite de la diagonale de Cantor. On sait par (3) que tout élément $a \in P$ peut s'écrire
$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \text{ avec } a_i = 0 \text{ ou } 2.$$
On remarque aussi que cette représentation est unique en utilisant l'exercice 1 de la série 18. Supposons par l'absurde que P soit dénombrable et soit $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$ une énumération de P. Chaque $a^{(i)}$ s'écrit donc $a^{(i)} = 0, a_1^{(i)} a_2^{(i)} \cdots$. Pour tout $i > 0$, on définit le nombre $\overline{a} = 0, \overline{a}_1 \overline{a}_2 \cdots$ par
$$\overline{a}_i = 2 - a_i^{(i)}$$
Ce nombre $\overline{a}$ appartient à P et diffère de tous les $a^{(n)}$, ce qui est contradictoire.