EPFL - Printemps 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Corrigé**
Série 18	13 mars 2017

Exercice 1.
Soient

$$0, a_1 a_2 \cdots \;=\; 0, b_1 b_2 \cdots$$

deux développements non-identiques. Il existe donc $k \geq 0$ tel que

$$a_n = b_n \text{ pour tout } n \leq k \text{ et } a_{k+1} \neq b_{k+1}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_{k+1} < b_{k+1}$. Il faut montrer que la seule possibilité est que

$$\begin{cases} b_{k+1} = a_{k+1} + 1, \\ a_m = 2 \quad \text{et} \quad b_m = 0, \quad \forall\, m \geq k+2. \end{cases} \tag{1}$$

Par (1), nous savons que pour des $a_n \in \{0, 1, 2\}$,

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \leq \frac{1}{3^{k+1}} \quad \text{avec égalité si et seulement si } a_n = 2 \text{ pour tout } n \geq k+2. \tag{2}$$

Montrons à présent (1) par l'absurde:

- si $a_{k+1} = 0$ et $b_{k+1} = 2$ alors

  $$0 = (0, b_1 \cdots) - (0, a_1 \cdots) \geq \frac{2}{3^{k+1}} - \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \geq \frac{2}{3^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}} > 0,$$

  où nous avons utilisé (2) pour la seconde inégalité;

- si $a_{k+1} + 1 = b_{k+1}$ et qu'il existe $m \geq k+2$ tel que $a_m \neq 2$ ou $b_m \neq 0$ alors

  $$0 = (0, b_1 \cdots) - (0, a_1 \cdots) = \frac{1}{3^{k+1}} - \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n} > \frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}} = 0,$$

  où nous avons utilisé (2) pour la seconde inégalité.

Exercice 2.

1. Posons
$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \quad \psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}.$$
Puisque les A_i sont deux à deux disjoints et recouvrent $\mathbb{R}$ et de même pour les B_j, on a que, pour tout i et j,
$$\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i \cap B_j}.$$
Puisque $\psi \leq \varphi$ on a donc que
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{A_i \cap B_j} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{A_i \cap B_j}.$$
On en déduit directment que
$$b_j \leq a_i \quad \text{pour tout } i, j \text{ tels que } A_i \cap B_j \neq \emptyset.$$
Il s'ensuit que
$$\begin{aligned} \int \psi &= \sum_{j=1}^{m} b_j \operatorname{mes}(B_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \operatorname{mes}(A_i \cap B_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \operatorname{mes}(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{mes}(A_i) \\ &= \int \varphi. \end{aligned}$$

2. Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. On doit montrer que
$$\sup \left\{ \int \psi : \ \psi \text{ simple et } \psi \leq \varphi \right\} = \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{mes}(A_i).$$
($\geq$) Puisque φ est simple et $\varphi \leq \varphi$, on a donc
$$\sup \left\{ \int \psi : \ \psi \text{ simple et } \psi \leq \varphi \right\} \geq \int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{mes}(A_i).$$
($\leq$) Soit ψ une fonction simple telle que $\psi \leq \varphi$. Par le point 1, on a
$$\int \psi \leq \int \varphi.$$
En passant au sup sur les ψ, nous avons directement
$$\sup \left\{ \int \psi : \ \psi \text{ simple et } \psi \leq \varphi \right\} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{mes}(A_i).$$

Exercice 3.
Les points 1 et 2 sont élémentaire. Montrons 3. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on a

$$A \cap E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap E_j,$$

où l'union est disjointe, puisque les E_j sont par hypothèses deux à deux disjoints. Par additivité de la mesure, ceci implique

$$\operatorname{mes}(A \cap E) = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{mes}(A \cap E_j).$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes}(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{mes}(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes}(A_i \cap E_j). \tag{3}$$

Dans la dernière égalité, la permutation des sommes est justifiée par le fait que l'une des deux est finie. Pour conclure, nous utilisons le point 2 et l'égalité (3)

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{mes}(A_i \cap E) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{mes}(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_i} \varphi.$$

Exercice 4.

1. Pour toute fonction φ simple et mesurable telle que $0 \leq \varphi \leq f \leq g$, on a par définition

   $$\int_A \varphi \leq \int_A g.$$

   En passant au suprémum sur tous les $\varphi \leq f$ simples et mesurables, on a bien

   $$\int_A f \leq \int_A g.$$

2. Le résultat est trivial si $a = 0$. Si $a > 0$, alors pour tout $\varphi \leq f$ simple et mesurable, on a $a\varphi \leq af$. Alors par l'exercice 2,

   $$\begin{aligned} a \int f &= a \sup_{\varphi} \left\{ \int \varphi : \varphi \leq f \right\} = \sup_{\varphi} \left\{ a \int \varphi : \varphi \leq f \right\} \\ &= \sup_{\varphi} \left\{ \int a\varphi : a\varphi \leq af \right\} = \sup_{\psi} \left\{ \int \psi : \psi \leq af \right\} \\ &= \int af. \end{aligned}$$

3. Si $A \subset B$, alors $\chi_A \leq \chi_B$, d'où par le point (1),
$$\int_A f = \int f\chi_A \leq \int f\chi_B = \int_B f.$$
4. Si $\operatorname{mes}(A) = 0$, alors $\chi_A = 0$ presque partout, de même pour $f\chi_A$. Par une proposition montrée au cours, ceci implique
$$\int_A f = \int f\chi_A = 0.$$

Exercice 5.
Soit
$$f_\nu(x) := \begin{cases} \chi_{[0,1]}(x) & \nu \text{ pair} \\ \chi_{]1,2[}(x) & \nu \text{ impair.} \end{cases}$$
avec $\nu \geq 1$. On a alors
$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
mais
$$\int f_n(x) = 1, \quad \forall\, \nu \geq 1,$$
d'où
$$0 = \int \liminf_{n\to\infty} f_n(x) < \liminf_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = 1.$$

Exercice 6.
Il faut montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble
$$(f \circ \varphi)^{-1}\left(]\alpha, \infty[\right) = \varphi^{-1}\left(f^{-1}\left(]\alpha, \infty[\right)\right)$$
est mesurable. Puisque f est continue, alors $O := f^{-1}\left(]\alpha, \infty[\right)$ est ouvert, donc borélien. Par un lemme du cours, puisque φ est mesurable, alors $\varphi^{-1}(O)$ est mesurable.