EPFL - Printemps 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Corrigé**
Série 17	6 mars 2018

Exercice 1.

1. Evident.

2. Soit $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} E_n$. Alors il existe $M \geq 1$ tel que

$$x \in \bigcap_{n \geq M} E_n. \tag{1}$$

Soit $m \geq 1$. Si $m \leq M$, alors par (1),

$$x \in E_M \subset \bigcup_{n \geq M} E_n \subset \bigcup_{n \geq m} E_n.$$

Si $m \geq M$, alors par (1),

$$x \in E_m \subset \bigcup_{n \geq m} E_n.$$

Par conséquent, $x \in \limsup_{n\to\infty} E_n$.

3. La suite d'ensemble $\{E_n\}$ définie par

$$E_n = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \emptyset, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

vérifie

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \emptyset \quad \text{alors que} \quad \limsup_{n\to\infty} E_n = \mathbb{R}.$$

4. Si $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, alors pour tout $m \geq 1$

$$\bigcap_{n \geq m} E_n = E_m \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \geq m} E_n = \bigcup_{n \geq 1} E_n,$$

d'où

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

On définit $F_1 := E_1$ et $F_n := E_n \setminus E_{n-1}$ pour $n > 1$. On montre facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

et donc
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$
Il est également clair que les ensembles F_n sont mesurables et disjoints. Ainsi on a

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) &= \operatorname{mes}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \operatorname{mes}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes}(F_n) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes}(F_i) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}(E_n).\end{aligned}$$

Remarque : Nous ne pouvons pas faire

$$\operatorname{mes}(F_n) = \operatorname{mes}(E_n) - \operatorname{mes}(E_{n-1}),$$

car la mesure des E_n n'est a priori pas finie.

5. Si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, alors pour tout $m \geq 1$

$$\bigcup_{n\geq m} E_n = E_m \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\geq m} E_n = \bigcap_{n\geq 1} E_n,$$

d'où
$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$
Si les E_n sont mesurables, alors pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$\operatorname{mes}(E_1 \setminus E_n) = \operatorname{mes}(E_1) - \operatorname{mes}(E_1 \cap E_n) = \operatorname{mes}(E_1) - \operatorname{mes}(E_n).$$

On a que $E_1 \setminus E_1 \subset E_1 \setminus E_2 \subset E_1 \setminus E_3 \subset \ldots$, et donc, par le point 4 et le fait que $\operatorname{mes}(E_1) < \infty$,

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\left(\lim_{n\to\infty} (E_1 \setminus E_n)\right) &= \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}(E_1 \setminus E_n) = \lim_{n\to\infty} [\operatorname{mes}(E_1) - \operatorname{mes}(E_n)] \\ &= \operatorname{mes}(E_1) - \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}(E_n). \qquad (2)\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{n\to\infty} (E_1 \setminus E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_n) = E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \setminus \lim_{n\to\infty} E_n.$$

Ainsi par (2), on obtient que

$$\operatorname{mes}(E_1) - \operatorname{mes}\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \operatorname{mes}(E_1) - \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}(E_n).$$

Pour finir, on obtient le résultat soustrayant de chaque côté de l'égalité précédente $\operatorname{mes}(E_1)$ (cette opération est permise car $\operatorname{mes}(E_1) < \infty$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $E_n =]n, \infty[$. On a clairement que $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $\text{mes}(E_n) = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} E_n = \emptyset$. Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \text{mes}(E_n) = \infty \neq 0 = \text{mes}\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right).$$

Exercice 2.

1. Montrons que si f est s.c.inf, alors G_α est fermé (la démonstration est identique pour f s.c.sup.) Soit une suite $\{x_n\} \subset G_\alpha$ telle que $x_n \to x \in \mathbb{R}$ et soit $\epsilon > 0$. Par s.c.inf en x, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y) + \epsilon.$$

   Par convergence de $\{x_n\}$ vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x - x_n| \leq \delta,$$

   d'où

$$f(x) \leq f(x_n) + \epsilon \leq \alpha + \epsilon$$

   pour n suffisamment grand. Cette inégalité étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, on a donc

$$f(x) \leq \alpha,$$

   c'est-à-dire $x \in G_\alpha$, ce qui prouve que G_α est fermé.

2. Puisque G_α est fermé alors il est mesurable. Par un résultat du cours, ceci implique que f est mesurable. Idem pour F_α.

Exercice 3.
Si une fonction est décroissante, alors son opposé est croissante. Puisque l'opposé d'une fonction mesurable est mesurable, il est suffisant de montrer que si f est croissante alors f est mesurable, c'est-à-dire pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$E_\alpha := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$$

est mesurable. On peut supposer sans perte de généralité que $E_\alpha \neq \emptyset$, car l'ensemble vide est un ensemble mesurable. Soient $x, y \in E_\alpha$, $x < y$. Alors par croissance de f, on a trivialement

$$[x, y] \subset E_\alpha,$$

ce qui implique que E_α est connexe, et donc un intervalle, mesurable.

Remarque.
En fait, on peut montrer que E_α est nécessairement égal à l'un des quatre ensembles mesurables suivants:

$$[a, \infty), \quad (a, \infty), \quad \emptyset, \quad \mathbb{R},$$

pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. Si $\alpha \leq 0$, $\{x : f^2(x) > \alpha\} = \mathbb{R}$. Si $\alpha > 0$, $\{x : f^2(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$ est mesurable.
2. $fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$ est mesurable par (1) et par un théorème du cours (f, g mesurables implique $f+g$ mesurable).
3. $|f| = \max(f, -f)$ est mesurable utilisant deux théorèmes du cours (f mesurable implique $-f$ mesurable et $\{f_\nu\}$ mesurables implique $\sup\{f_\nu\}$ mesurable).

Exercice 5.

1. Il y a trois choses à montrer.

   a) Soit $\{a_i\}$ la suite construite dans l'énoncé et montrons que pour tout $i \geq 1$

   $$0 \leq (a - \widetilde{a}_i) \leq \frac{1}{3^i}. \tag{3}$$

   Nous savons que pour tout $x \geq 0$,

   $$x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1].$$

   Pour $i = 1$, nous avons donc

   $$a - \widetilde{a}_1 = a - \frac{\lfloor 3a \rfloor}{3} = \frac{1}{3}\left(3a - \lfloor 3a \rfloor\right) \in [0, 1/3].$$

   Pour $i \geq 2$, nous calculons

   $$\begin{aligned} 3^i\left(a - \widetilde{a}_i\right) &= 3^i\left(a - \widetilde{a}_{i-1} - \frac{a_i}{3^i}\right) \\ &= 3^i\left(a - \widetilde{a}_{i-1}\right) - \lfloor 3^i\left(a - \widetilde{a}_{i-1}\right) \rfloor \\ &\in [0, 1], \end{aligned}$$

d'où le résultat.

b) Montrons que $a_i \in \{0,1,2\}$. En effet, puisque $0 \leq a \leq 1$, on a que $0 \leq 3a \leq 3$ et donc $a_1 = \lfloor 3a \rfloor \in \{0,1,2\}$.
Utilisant (3), on a que $0 \leq 3^i(a - \widetilde{a}_i) \leq 1$ et donc

$$0 \leq 3^{i+1}(a - \widetilde{a}_i) \leq 3 \quad \text{d'où} \quad a_{i+1} = \lfloor 3^{i+1}(a - \widetilde{a}_i) \rfloor \in \{0,1,2\}.$$

c) Montrons pour finir que $a = 0, a_1 a_2 \cdots$. Utilisant à nouveau (3), il vient que

$$a - \widetilde{a}_i = a - \sum_{n=1}^{i} \frac{a_n}{3^n} \to 0 \text{ lorsque } i \to \infty.$$

La suite $\{a_i\}$ a donc bien toutes les propriétés voulues.

2. Si $a_i \in \{0,1,2\}$, alors

$$0, a_1 a_2 \cdots \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1.$$

3. On a $\frac{1}{3} = 0,10 \cdots 0 = 0,02 \cdots 2$.