EPFL - Printemps 2018	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Corrigé**
Série 16	27 février 2018

Exercice 1.
Il est élémentaire de voir que $\sim$ est une relation d'équivalence. Par conséquent, Ω est l'union disjointe des classes d'équivalence de $\sim$. Soit $C(a)$ la classe d'équivalence contenant a et montrons d'abord qu'il s'agit d'un intervalle ouvert.

Intervalle : Il suffit de montrer que $C(a)$ est connexe. Par transitivité de $\sim$, il est facile de voir que

$$b \in C(a) \quad \Rightarrow \quad [a, b] \subset C(a) \quad \text{ou} \quad [b, a] \subset C(a).$$

Par conséquent, pour tout $b, c \in C(a)$, nous avons immédiatement $[b, c] \subset C(a)$ ou $[c, b] \subset C(a)$, et donc $C(a)$ est un intervalle.

Ouvert : Puisque Ω est ouvert, alors pour tout $b \in C(a)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$]b - \epsilon, b + \epsilon[\subset \Omega.$$

Par transitivité de $\sim$,

$$c \in]b - \epsilon, b + \epsilon[\ \Rightarrow\ c \sim b \ \Rightarrow\ c \sim a \ \Rightarrow\ c \in C(a),$$

ce qui prouve que $C(a)$ est ouvert.

Conclusion, Ω est l'union disjointe d'intervalles ouverts $\{C(a)\}$. Par l'exercice 3 de la série 15, cette union admet un recouvrement dénombrable, d'où le résultat.

Exercice 2.
Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = A$. Soit

$$O := \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n - \epsilon/2^{n+1}, a_n + \epsilon/2^{n+1}[.$$

Il est évident que O est ouvert et que $O \supset A$. De plus

$$\text{mes}^*(O) \le \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}\left(]a_n - \epsilon/2^{n+1}, a_n + \epsilon/2^{n+1}[\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon/2^n = \epsilon.$$

Exercice 3.

1. On rappelle que E est mesurable si et seulement si pour tout $A \subset \mathbb{R}$,

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c).$$

(≤) Par sous-additivité, nous avons directement

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq \text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c).$$

(≥) D'une part,

$$\begin{aligned} (A \cap E) \subset E \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq \text{mes}^*(A \cap E) \leq \text{mes}^*(E) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \text{mes}^*(A \cap E) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part

$$(A \cap E^c) \subset A \quad \Rightarrow \quad \text{mes}^*(A \cap E^c) \leq \text{mes}^*(A)$$

d'où

$$\text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c) \leq \text{mes}^*(A).$$

2. Soit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ dénombrable, avec $x_n \in \mathbb{R}$. Par la sous-additivité de mes^* et le fait que les singletons sont de mesure nulle, on a donc

$$\text{mes}^*(E) = \text{mes}^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}^*(\{x_n\}) = 0.$$

3. Immédiat en utilisant (1) et (2).

Exercice 4.
Nous allons seulement montrer l'assertion pour des intervalles du type $[a_n, b_n]$; pour les intervalles du type $]a_n, b_n]$ et $[a_n, b_n[$ la démonstration est identique. Définissons

$$\text{mes}_\text{f}{}^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : \ I_n^f = [a_n, b_n], \ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^f \right\}.$$

On va montrer que

$$\text{mes}^*(E) = \text{mes}_\text{f}{}^*(E), \quad \forall \ E \subset \mathbb{R}.$$

(≥) Soit $\{]a_n, b_n[\}_{n=1}^{\infty}$ un recouvrement ouvert de E; on a alors que $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ est un recouvrement fermé de E, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{long}\left(]a_n, b_n[\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{long}\left([a_n, b_n]\right) \geq \operatorname{mes_f}^*(E).$$

Ceci étant valable pour tout recouverement ouvert $\{]a_n, b_n[\}_{n=1}^{\infty}$, on a bien

$$\operatorname{mes}^*(E) \geq \operatorname{mes_f}^*(E)$$

(≤) Soit $\epsilon > 0$ et montrons que

$$\operatorname{mes}^*(E) \leq \operatorname{mes_f}^*(E) + \epsilon,$$

ce qui nous donnera l'inégalité désirée. Soit un recouvrement fermé $F_n := [a_n, b_n]$. Nous définissons ensuite des intervalles ouvert

$$I_n :=]a_n - \epsilon/2^{n+1}, b_n + \epsilon/2^{n+1}[\supset F_n.$$

Nous avons

$$\operatorname{long}(I_n) = \operatorname{long}(F_n) + \epsilon/2^n,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{long}(I_n) = \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{long}(F_n).$$

Puisque $\{I_n\}$ est un recouvement ouvert de E, nous avons

$$\operatorname{mes}^*(E) \leq \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{long}(F_n).$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour n'importe quel recouvrement fermé de E, nous pouvons passer à l'infimum dans le membre de droite, ce qui nous donne finalement

$$\operatorname{mes}^*(E) \leq \operatorname{mes_f}^*(E) + \epsilon.$$