EPFL - Printemps 2018	Prof. B. Dacorogna
Analyse IV (MA)	**Corrigé**
Série 15	20 février 2018

Exercice 1.
Les sept premières assertions sont triviales. Il suffit de se rappeler que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors pour tout $E \subset \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(E) := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in E\}.$$

Montrons l'avant dernière assertion:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad & \Rightarrow \quad \exists i \in \mathbb{N},\ x \in A_i,\ \forall j \in \mathbb{N},\ x \notin B_j \\ & \Rightarrow \quad \exists i \in \mathbb{N},\ x \in A_i,\ x \notin B_i \\ & \Rightarrow \quad \exists i \in \mathbb{N},\ x \in A_i \setminus B_i \\ & \Rightarrow \quad x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[A_i \setminus B_i\right]. \end{aligned}$$

Pour la dernière assertion, il est clair que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^{i} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right].$$

Montrons l'autre inclusion. Nous remarquons d'abord que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^{i} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right] \supset \bigcup_{k=1}^{1} A_k \setminus \bigcup_{k=0}^{i-1} A_k = A_1 \setminus \emptyset = A_1.$$

Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Si $x \in A_1$, alors par ce qui précède

$$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^{i} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right].$$

D'autre part, si $x \in [\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \setminus A_1$, il existe alors $j \geq 2$ tel que $x \in A_j$ et $x \notin A_k$ pour tout $1 \leq k < j$. Il s'ensuit que

$$x \in A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^{i} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right].$$

Exercice 2.
Nous prodédons en 4 étapes.

Etape 1. On peut tout d'abord supposer, sans perte de généralité, qu'aucun J_n n'est contenu un autre J_m, sinon on l'enlève car le résultat est alors a fortiori vrai. De même on peut supposer que $J_n \cap [a,b] \neq \emptyset$, sinon on l'enlève aussi et le résultat est encore vrai.

Etape 2. On ordonne alors les c_n de manière à avoir

$$c_1 < \cdots < c_n < c_{n+1} < \cdots < c_N .$$

Noter qu'on a nécessairement

$$d_1 < \cdots < d_n < d_{n+1} < \cdots < d_N .$$

En effet si $d_n \leq d_k$ pour $k < n$, alors

$$c_k < c_n < d_n \leq d_k$$

et donc $J_n \subset J_k$, ce que nous avons exclu.

Etape 3. Montrons l'inégalité

$$c_{n+1} < d_n .$$

Par l'absurde, supposons que

$$c_n < d_n \leq c_{n+1} < d_{n+1},$$

ce qui implique

$$\bigcup_{n=1}^{N} J_n \cap \,]d_n, c_{n+1}[\, = \emptyset.$$

Or par hypothèse $[a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{N} J_n$, d'où

$$[a,b] \cap \,]d_n, c_{n+1}[= \emptyset.$$

Dans ce cas, puisque les intervalles sont les composantes connexes de $\mathbb{R}$, on a soit

$$a < b < d_n \leq c_{n+1} < d_{n+1} \quad \Rightarrow \quad J_{n+1} \cap [a,b] = \emptyset$$

ce qui est exclu par l'étape 1, soit

$$c_n < d_n \leq c_{n+1} < a < b \quad \Rightarrow \quad J_n \cap [a,b] = \emptyset$$

ce qui est également exclu.

Etape 4. On peut maintenant conclure

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \operatorname{long}(J_n) = \sum_{n=1}^{N} (d_n - c_n) \geq \sum_{n=1}^{N} (d_n - c_n) - \sum_{n=1}^{N-1} (d_n - c_{n+1}) \\ = d_N - c_1 \geq b - a. \end{aligned}$$

Exercice 3.
Posons
$$B := \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha.$$
Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in B$, il existe $J_x =]a_x, b_x[$ tel que
$$a_x, b_x \in \mathbb{Q}, \quad x \in J_x \subset I_\alpha,$$
pour un certain $\alpha \in A$. Par construction, nous avons donc
$$\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha = \bigcup_{x \in B} J_x.$$
Puisque l'ensemble $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ est dénombrable, la collection des intervalles $\{J_x\}_{x \in B}$ est au plus dénombrable. C'est à dire qu'il existe une collection $\{J_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \{J_x\}_{x \in B}$ telle que
$$\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i.$$
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on choisit ensuite un intervalle $I_i \in \{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tel que
$$I_i \supset J_i.$$
Il s'ensuit que
$$\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subset \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha,$$
d'où le résultat.