EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 14	16 décembre 2017

Exercice 1.

1. Puisque f est holomorphe et non-constante, il existe $r > 0$ suffisamment petit tel que $f \neq 0$ dans $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. En effet, si ce n'était pas le cas, f serait nulle sur une suite de points convergeant vers z_0, et donc, par le théorème du prolongement analytique, f serait identiquement nulle dans Ω.
   Comme z_0 est un zéro d'ordre k de f, alors on peut écrire,
   $$f(z) = (z - z_0)^k F(z), \quad \forall\, z \in B_r(z_0),$$
   où F est une fonction holomorphe telle que $F \neq 0$ dans $B_r(z_0)$. D'où
   $$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} F(z) + (z - z_0)^k F'(z), \quad \forall\, z \in B_r(z_0),$$
   et donc
   $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{(z - z_0)} + \frac{F'(z)}{F(z)}, \quad \forall\, z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$
   ce qui nous donne immédiatement
   $$\text{Rés}_{z_0}(f'/f) = k.$$

2. Soient $z_1, \ldots, z_m \in \text{int}(\gamma)$ des zéros de f respectivement d'ordre $k_1, \ldots, k_m \geq 1$. Le nombre m de zéros est fini, car sinon, par le théorème du prolongement analytique, f serait identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas, puisque f est non-constante.
   Comme f est holomorphe dans $\text{int}(\gamma)$, alors $z_1, \ldots, z_m$ sont les seuls pôles de f'/f. Donc, par le théorème des résidus et le point précédent, nous avons directement
   $$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} = \text{Rés}_{z_1}(f'/f) + \cdots + \text{Rés}_{z_m}(f'/f) = k_1 + \cdots + k_m,$$
   d'où le résultat.

Exercice 2.
Nous définissons

$$f_t(z) = f(z) + t g(z), \quad \forall\, t \in [0, 1]$$

et $n_t \in \mathbb{N}$ est le nombre de zéros de f_t, comptés avec multiplicité, dans $\mathrm{int}(\gamma)$. Nous allons montrer que $n_0 = n_1$ pour conclure.

Puisque $|f(z)| > |g(z)|$ sur γ, alors f_t ne s'annule pas sur γ. En effet, si c'était le cas, on aurait

$$t|g(z)| = |f(z)| > |g(z)|$$

pour un certain $z \in \gamma$ et $t \in [0,1]$, ce qui est absurde. Ceci nous permet d'appliquer l'exercice 1 :

$$n_t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}\,dz.$$

De plus, par holomorphie de f et g, l'application

$$(t,z) \mapsto \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}$$

est uniformément continue dans $[0,1]\times\gamma$, ce qui implique que

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}\,dz = n_t$$

est continue dans $[0,1]$. Puisque $n_t \in \mathbb{N}$, celà n'est possible que si n_t est constante, d'où

$$n_0 = n_1.$$

Exercice 3.

1. Par l'absurde, si pour tout $r > 0$ il existe $z_r \in B_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ tel que $f'(z_r) = 0$, alors, il existe une suite $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ d'éléments différents tels que $z_n \to z_0$ et $f'(z_n) = 0$. Ainsi, par le principe du prolongement analytique, $f' = 0$ dans Ω et donc, f est constante ce qui est une contradiction.

2. Soit $\overline{z} \in B_r(z_0)$ un zéro de la fonction $f(z) - f(z_0) - w$ alors, $\overline{z} \neq z_0$ car $f(z_0) - f(z_0) - w = -w \neq 0$. Ainsi, $\overline{z} \in B_r(z_0)\setminus\{z_0\}$. D'où,

$$\left.\frac{d}{dz}\right|_{z=\overline{z}} [f(z) - f(z_0) - w] = f'(\overline{z}) \neq 0,$$

ce qui montre que $\overline{z}$ est un zéro d'ôrdre 1.

3. Pour $j = 0, ..., k-1$, on pose

$$\overline{z}_j = z_0 + \left|\frac{w}{\lambda}\right|^{\frac{1}{k}} e^{i\frac{\arg\left(\frac{w}{\lambda}\right)+2j\pi}{k}}.$$

Alors,

$$|\overline{z}_j - z_0| = \left|\frac{w}{\lambda}\right|^{\frac{1}{k}} < \frac{r}{2^{\frac{1}{k}}} < r,$$

d'où $\overline{z}_j \in B_r(z_0)$. De plus, $h_w(\overline{z}_j) = 0$, d'où h_w a k zéros dans $B_r(z_0)$.

4. On remarque que

$$\frac{F(z)}{\lambda(z-z_0)^k}$$

est holomorphe et s'annule en z_0. Ainsi, par continuité, il existe $r > 0$ tel que

$$\left|\frac{F(z)}{\lambda(z-z_0)^k}\right| < \frac{1}{2}$$

pour tout $z \in B_r(z_0)$. Ainsi,

$$|F(z)| < \frac{1}{2}|\lambda||z-z_0|^k < |\lambda|\frac{r^k}{2}$$

pour tout $z \in B_r(z_0)$, ce qui est le résultat voulu.

5. Supposons par l'absurde que $z_0 \in \Omega$ soit tel que $f'(z_0) = 0$. Par le point 1, il existe $r_1 > 0$ tel que $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in B_{r_1}(z_0) \setminus \{z_0\}$. Ainsi, z_0 est un zéro d'ordre deux ou plus de la fonction $f(z) - f(z_0)$. Donc, il existe $k \geq 2$ et $\lambda \neq 0$ tels que

$$f(z) - f(z_0) = \lambda(z-z_0)^k + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}_{:=F(z)}.$$

Par le point 4, il existe $0 < r < r_1$ tel que

$$|F(z)| < |\lambda|\frac{r^k}{2}$$

pour tout $z \in B_r(z_0)$.

Soit maintenant $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tel que $|w| < |\lambda| r^k/2$.

On pose $h_w(z) := \lambda(z-z_0)^k - w$, et on considère γ le bord de la boule $B_r(z_0)$. Alors, pour tout $z \in \gamma$,

$$|h_w(z)| \geq |\lambda||z-z_0|^k - |w| > |\lambda|\frac{r^k}{2} > |F(z)|.$$

Ainsi, par le théorème de Rouché, h_w et $h_w + F$ ont le même nombre de zéros dans $B_r(z_0)$. Or, par le point 3, h_w a k zéros dans $B_r(z_0)$. Donc, $h_w(z) + F(z) = f(z) - f(z_0) - w$ a k zéros dans $B_r(z_0)$. Or, par le point 2, les zéros de $f(z) - f(z_0) - w$ sont d'ordre au plus 1. Ainsi, vu que $k \geq 2$, on a qu'il existe $\overline{z}_1 \neq \overline{z}_2 \in B_r(z_0)$ tels que

$$f(\overline{z}_1) - f(z_0) - w = 0 = f(\overline{z}_2) - f(z_0) - w,$$

ce qui entre en contradiction avec le fait que f est injective.

Exercice 4.

On a
$$u'(t) \;=\; \left(v\left(\frac{1}{t}\right)\right)' \;=\; v'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$
et
$$u''(t) \;=\; \left(v'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right)' \;=\; \frac{1}{t^4}v''\left(\frac{1}{t}\right)+v'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{2}{t^3}\,.$$
Il s'ensuit que
$$\begin{aligned}
&t^2u''(t)+t\left[2-\frac{1}{t}a\left(\frac{1}{t}\right)\right]u'(t)+\frac{1}{t^2}b\left(\frac{1}{t}\right)u(t)\\
&\quad= z^2v''(z)+2zv'(z)-zv'(z)[2-za(z)]+z^2b(z)v(z)\\
&\quad= z^2(v''(z)+a(z)v'(z)+b(z)v(z))\\
&\quad= 0.
\end{aligned}$$

Exercice 5.

1. $z_0=0$ est une singularité régulière. A l'infini l'équation devient
$$t^2u''+t[2-\frac{1}{t}(tc-1)]u'-\frac{1}{t}au=0.$$
Il s'ensuit que $z_0=\infty$ est un point singulier irrégulier.
2. Pas de singularités finies. A l'infini l'équation devient
$$t^2u''+2tu'+\frac{1}{t^3}u=0.$$
Il s'ensuit que $z_0=\infty$ est un point singulier irrégulier.
3. Montrons que $z_0=\pm1$ sont des singularités régulières. Montrons ceci pour $z_0=1$ l'autre étant analogue. Multipliant l'équation par $\frac{1-z}{1+z}$ l'équation devient
$$(z-1)^2u''+(z-1)\frac{2z}{1+z}u'+\frac{\alpha(\alpha+1)(1-z)}{1+z}u=0,$$
d'où le résultat.
On a
$$a(z)=-\frac{2z}{1-z^2}\quad \text{et}\quad b(z)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-z^2}$$
et donc
$$2-\frac{1}{t}a(1/t)=2-\frac{1}{t}\frac{2/t}{1-1/t^2}=2+\frac{2}{t^2-1}$$
$$\frac{1}{t^2}b(1/t)=\frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2-1}.$$
Ainsi $z_0=\infty$, est une singularité régulière.

4. $z_0 = 0$ est une singularité régulière.
   On a
$$a(z) = \frac{1-z}{z} \quad \text{et} \quad b(z) = \frac{\alpha}{z}$$
   et donc
$$2 - \frac{1}{t}a(1/t) = 2 - \frac{1}{t}\frac{1-1/t}{1/t} = 2 - \frac{t-1}{t}$$
$$\frac{1}{t^2}b(1/t) = \frac{\alpha}{t}.$$
   Ainsi $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière.
5. Aucune singularité finie. On a
$$2 - \frac{1}{t}a(1/t) = 2 + \frac{2}{t^2},$$
$$\frac{1}{t^2}b(1/t) = \frac{\alpha}{t^2}.$$
   Ainsi $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière.

Exercice 6.
On cherche des solutions de la forme $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. On obtient
$$u''(z) + zu(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1}$$
$$= 2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+2)c_{n+3} + c_n\right] z^{n+1}.$$
On trouve donc $c_2 = 0$ et
$$c_{n+3} = -\frac{c_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n \geq 0.$$
Par induction, on trouve que
$$\begin{cases} c_{3k} = (-1)^k \frac{\prod_{l=1}^{k}(3l-2)}{(3k)!} c_0 =: a_k c_0, \quad a_0 = 1, \\ c_{3k+1} = (-1)^k \frac{\prod_{l=1}^{k}(3l-1)}{(3k+1)!} c_1 =: b_k c_1, \quad b_0 = 1, \\ c_{3k+2} = 0 \end{cases}$$
Pour finir, on a donc que
$$u(z) = c_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{3k} \right) + c_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{3k+1} \right).$$
Le rayon de convergence est infini par un théorème du cours ou par un calcul direct (règle de d'Alembert).