EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 13	11 décembre 2017

Exercice 1.
L'application

$$f(z) = 2\pi i \left(z - \frac{1}{2} \right), \quad z \in \Omega_1$$

est obtenue par une succession de transformations géométriques élémentaires : une translation de $-\frac{1}{2}$, une rotation d'angle $\pi/2$ (multiplication par $e^{i\pi/2} = i$) et une homothétie de rapport 2π.

Exercice 5.

1. Nous notons $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ et $c(t) = c_1(t)+ic_2(t)$, d'où

$$(f \circ c)(t) = u(c_1(t), c_2(t)) + iv(c_1(t), c_2(t)).$$

Nous calculons d'abord, par la formule de dérivation d'une composition de fonctions

$$\begin{aligned} (f \circ c)'(t) &= \frac{d}{dt}\left[u(c_1(t), c_2(t))\right] + i\frac{d}{dt}\left[v(c_1(t), c_2(t))\right] \\ &= u_x(c_1, c_2)c_1' + u_y(c_1, c_2)c_2' + i\left[v_x(c_1, c_2)c_1' + v_y(c_1, c_2)c_2'\right]. \end{aligned}$$

Comme f est holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann nous donnent

$$(f \circ c)'(t) = u_x(c_1, c_2)c_1' - v_x(c_1, c_2)c_2' + i\left[v_x(c_1, c_2)c_1' + u_x(c_1, c_2)c_2'\right]. \tag{1}$$

Ensuite, encore par holomorphie de f, on peut écrire

$$f'(c(t)) = u_x(c_1, c_2) + iv_x(c_1, c_2). \tag{2}$$

Enfin,

$$c'(t) = c_1'(t) + ic_2'(t). \tag{3}$$

En regroupant les égalités (1) à (3), nous avons bien

$$(f \circ c)'(t) = f'(c(t))\, c'(t).$$

De même,

$$(f \circ d)'(t) = f'(d(t))\, d'(t).$$

2. Par le point précédent, et comme $c(0) = d(0) = z_0$, on a directement

$$\frac{(f \circ d)'(0)}{(f \circ c)'(0)} = \frac{f'(d(0))\, d'(0)}{f'(c(0))\, c'(0)} = \frac{f'(z_0)\, d'(0)}{f'(z_0)\, c'(0)} = \frac{d'(0)}{c'(0)}.$$

Remarque. Puisque $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$, l'égalité précédente implique que l'angle entre les courbes $c(t)$ et $d(t)$ au point z_0 et l'angle entre l'image des courbes, c'est-à-dire $(f \circ c)(t)$ et $(f \circ d)(t)$, au point $f(z_0)$ sont egales.

Exercice 6.
On a

$$u'(t) \;=\; \left(v\left(\frac{1}{t}\right)\right)' \;=\; v'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

et

$$u''(t) \;=\; \left(v'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right)' \;=\; \frac{1}{t^4}v''\left(\frac{1}{t}\right) + v'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{2}{t^3}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&t^2u''(t) + t\left[2 - \frac{1}{t}a\left(\frac{1}{t}\right)\right]u'(t) + \frac{1}{t^2}b\left(\frac{1}{t}\right)u(t)\\
&\quad=\; z^2v''(z) + 2zv'(z) - zv'(z)[2 - za(z)] + z^2b(z)v(z)\\
&\quad=\; z^2(v''(z) + a(z)v'(z) + b(z)v(z))\\
&\quad=\; 0.
\end{aligned}$$

Exercice 7.
(i) Soit $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
u' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, u_{n+1} z^n\\
zu' &= \sum_{n=1}^{\infty} n u_n z^n\\
zu'' &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, n u_{n+1} z^n\\
z^2u'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, u_n z^n.
\end{aligned}$$

Ainsi, $zu'' - z^2u'' + \gamma u' - (\alpha+\beta+1)\, zu' - \alpha\beta u = 0$ est équivalent à

$$2u_2z + \gamma u_1 + 2\gamma u_2 z - (\alpha+\beta+1)\, u_1 z - \alpha\beta u_0 - \alpha\beta u_1 z +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)\, nu_{n+1} - n\,(n-1)\, u_n + \gamma\,(n+1)\, u_{n+1} - (\alpha+\beta+1)\, nu_n - \alpha\beta u_n\right] z^n = 0.$$

En identifiant terme à terme, on obtient comme conditions

$$\gamma u_1 - \alpha\beta u_0 = 0 \quad (4)$$

$$2u_2 + 2\gamma u_2 - (\alpha+\beta+1)\, u_1 - \alpha\beta u_1 = 0 \quad (5)$$

$$u_{n+1}\left[(n+1)\, n + \gamma\,(n+1)\right] - u_n\left[n\,(n-1) + (\alpha+\beta+1)\, n + \alpha\beta\right] = 0 \quad (6)$$

Ainsi,

$$u_{n+1} \overset{(6)}{=} \frac{n\,(n-1) + (\alpha+\beta+1)\, n + \alpha\beta}{(n+1)\, n + \gamma\,(n+1)} u_n = \frac{(n+\alpha)\,(n+\beta)}{(n+1)\,(n+\gamma)} u_n, \qquad (7)$$

et

$$u_2 \overset{(5)}{=} \frac{\alpha+\beta+1+\alpha\beta}{2\,(\gamma+1)} u_1 = \frac{(\alpha+1)\,(\beta+1)}{2\,(\gamma+1)} u_1 \overset{(4)}{=} \frac{\alpha\,(\alpha+1)\,\beta\,(\beta+1)}{2\gamma\,(\gamma+1)} u_0$$

Écrivons encore u_3 pour avoir une idée plus précise de la formulle close pour u_n :

$$u_3 = \overset{(7)}{=} \frac{(2+\alpha)\,(2+\beta)}{3(2+\gamma)} u_2 = \frac{(2+\alpha)\,(1+\alpha)\,\alpha\,(2+\beta)\,(1+\beta)\,\beta}{3\cdot 2\,(2+\gamma)\,(1+\gamma)\,\gamma} u_0.$$

On devine donc que la formule close pour u_n est

$$u_n = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(j+\alpha)\,(j+\beta)}{j+\gamma}\right) \frac{1}{n!} u_0 \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Montrons cette formule par récurrence.

Initialisation : Lorsque $n = 1$, la formule donne

$$u_1 \frac{\alpha\beta}{\gamma} u_0,$$

qui est bien ce qu'on a par (4).

Incrément :

$$u_{n+1} \overset{(7)}{=} \frac{(n+\alpha)\,(n+\beta)}{(n+1)\,(n+\gamma)} u_n$$

$$\overset{\text{H.R.}}{=} \frac{(n+\alpha)\,(n+\beta)}{(n+1)\,(n+\gamma)} \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{(j+\alpha)\,(j+\beta)}{j+\gamma}\right) \frac{1}{n!} u_0$$

$$= \left(\prod_{j=0}^{n} \frac{(j+\alpha)\,(j+\beta)}{j+\gamma}\right) \frac{1}{(n+1)!} u_0,$$

ce qui montre que notre formule close est exacte.

Pour le rayon de convergence, on a par le critère de d'Alambert,

$$\frac{\left|u_{n+1}z^{n+1}\right|}{\left|u_n z^n\right|} = \frac{|\alpha+n|\,|\beta+n|}{|\gamma+n|\,(n+1)}\,|z| \to |z|\,, \quad \text{si } n \to \infty,$$

ainsi la série converge si $|z| < 1$.

(ii) Soit $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$. Alors,

$$\begin{aligned} z^2 u'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,u_n z^n \\ z u' &= \sum_{n=1}^{\infty} n u_n z^n \\ z^2 u &= \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2} z^n. \end{aligned}$$

Ainsi, $z^2u'' + zu' + z^2u = 0$ est équivalent à

$$u_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n\,(n-1)\,u_n + n u_n + u_{n-2}\right] z^n = 0$$

En identifiant terme à terme, on obtient les conditions

$$u_1 = 0 \tag{8}$$

$$u_n\left[n\,(n-1)+n\right] + u_{n-2} = n^2 u_n + u_{n-2} = 0. \tag{9}$$

On a donc pour $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{-1}{n^2} u_{n-2}. \tag{10}$$

On devine que si n est impair, alors, $u_n = 0$.

Écrivons quelques termes pairs pour avoir une idée de la formule close dans ce cas là. Si $n = 2k$, on a,

$$u_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} u_{2(k-1)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_{2\cdot 1} &= \frac{(-1)^1}{(2\cdot 1)^2} u_0, \\ u_{2\cdot 2} &= \frac{(-1)^2}{\left[(2\cdot 2)\,(2\cdot 1)\right]^2} u_0. \end{aligned}$$

On devine donc que pour $k \geq 1$, on a

$$u_{2k} = \frac{(-1)^k}{\left(\prod_{j=1}^{k} 2j\right)^2} u_0 = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2} u_0.$$

Montrons cette formule par récurrence. Le fait que les termes impairs sont nuls est trivial. Voyons donc la formule pour les termes pairs.

Initialisation : Si $k = 1$, on a

$$u_2 = \frac{-1}{2^2} u_0,$$

qui est ce qu'on avait trouvé plus haut.

Incrément : On a

$$\begin{aligned} u_{2(k+1)} &\overset{(10)}{=} \frac{-1}{(2\,(k+1))^2} u_{2k} \\ &\overset{\text{H.R.}}{=} \frac{-1}{(2\,(k+1))^2} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2} u_0 = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2(k+1)}\,((k+1)!)^2} u_0, \end{aligned}$$

ce qui montre notre formule close.

Notre solution est donc

$$u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}\,(k!)^2} z^{2k}.$$

De plus,

$$\frac{\left| \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2(k+1)}((k+1)!)^2} z^{2(k+1)} \right|}{\left| \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} z^{2k} \right|} = \frac{|z^2|}{4\,(k+1)^2} \to 0, \quad \text{si } k \to \infty,$$

et donc le rayon de convergence de notre série est infini.