EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 12	4 decembre 2017

Exercice 1.

1. La série entière converge absolument en $|z| = r$ puisque

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n r^n| &= |a_0| + |a_1|r + \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \\ &\leq |a_0| + |a_1|r + r\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|r^{n-1} \\ &< |a_0| + |a_1|r + |a_1|r \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Son rayon de convergence est donc supérieur ou égal à r.

2. Soient $|w|, |z| < r$. On a directement

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=2}^{\infty}a_n\left(\sum_{j=0}^{n-1}z^{n-1-j}w^j\right)\right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\sum_{j=0}^{n-1}|z|^{n-1-j}|w|^j \leq \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\sum_{j=0}^{n-1}|r|^{n-1-j}|r|^j \\ &= \sum_{n=2}|a_n|nr^{n-1}\end{aligned}$$

3. Soient $z, w \in B(0,r)$ tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z^n - w^n) = 0.$$

Comme, pour $n \geq 2$,

$$z^n - w^n = (z-w)\sum_{j=0}^{n-1}z^{n-1-j}w^j,$$

nous avons

$$a_1(w-z) = \sum_{n=2}^{\infty}a_n(z^n - w^n) = (z-w)\sum_{n=2}^{\infty}a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1}z^k w^{n-1-k}\right),$$

en particulier,

$$|a_1||z-w| = |z-w|\left|\sum_{n\geq 2}a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1}z^k w^{n-1-k}\right)\right|.$$

Supposons par l'absurde que $z \neq w$, ce qui implique

$$|a_1| = \left| \sum_{n \geq 2} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \right) \right|. \tag{1}$$

Puisque $|z|, |w| \leq r$, nous avons, par le point 2 et par hypothèse

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \right) \right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k |w|^{n-1-k} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} \; < \; |a_1|, \end{aligned}$$

ce qui contredit (1). Ainsi $z = w$, et donc f est injective dans $B(0, r)$.

4. Sans perte de généralité, quitte à remplacer $f(z)$ par $f(z + z_0)$, on peut supposer que $z_0 = 0 \in \Omega$. Puisque f est holomorphe sur Ω, alors il existe $R > 0$ tel que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall \; |z| \leq R,$$

$$f'(z) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad \forall \; |z| \leq R,$$

avec $a_1 = f'(z_0) \neq 0$. Ceci implique que la fonction réelle

$$g(t) := \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n t^{n-1}$$

est continue sur $[0, R]$. Comme $g(0) = 0$, il existe $r \in \,]0, R[$ tel que

$$g(r) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} < |a_1|.$$

Alors, par le point 3, la fonction f est injective sur $B(0, r)$.

Exercice 2.

Nous donnons ici une manière alternative pour calculer le résidu en 0 de

$$\tilde{f}(z) = \frac{\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right)^2}{iz^5}.$$

Celui-ci est le coefficient en $\frac{1}{z}$ de la série de Laurent de $\tilde{f}$. Autrement-dit, il s'agit du coefficient en z^4 du numérateur

$$\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right)^2 / i.$$

Sans avoir à effectuer entièrement le carré, les seuls termes en z^4 sont simplement

$$\left(2\,z^4 \cdot 1 + 2\,z^3 \cdot z + \left(z^2\right)^2\right)/i = \frac{5\,z^4}{i},$$

et donc $\mathrm{Res}_0(\tilde{f}) = 5/i$.

Exercice 3.

1. Soit $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) := \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & : z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ 0 & : z = z_0 \end{cases}$$

   Montrons que g est holomorphe sur $B_r(z_0)$. Il est clair que g est holomorphe sur $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Voyons en z_0 :

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$$

   puisque f est bornée. On a donc que $g'(z_0) = 0$.

2. Par le théorème de Laurent, g se développe en série de Taylor autour de z_0 :

$$g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad \forall\ |z-z_0| < r,$$

   où $a_0 = g(z_0) = 0$ et $a_1 = g'(z_0) = 0$. Il en découle que

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-2}, \quad \forall\ |z-z_0| < r,\ z \neq z_0.$$

   La partie singulière de cette série est nulle, donc on peut prolonger f en z_0 en posant

$$f(z_0) := a_2 = g''(z_0)/2.$$

   Par le théorème du cours sur les séries entières, f est également holomorphe en z_0.

Exercice 4.

1. ($\Rightarrow$) Si z_0 est un pôle de f alors il existe un entier $k > 0$ et $L \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tels que

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z) = L.$$

   Par conséquent,

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|L|}{|z-z_0|^k} = \infty.$$

($\Leftarrow$) Réciproquement si

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty,$$

il existe par continuité un voisinage $V \subset B_r(z_0)$, $z_0 \in V$, tel que $f(z) \neq 0$ sur $V \setminus \{z_0\}$. Il s'ensuit que la fonction $g(z) := 1/f(z)$ est holomorphe sur $V \setminus \{z_0\}$. De plus, puisque

$$\lim_{z \to z_0} |g(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0,$$

alors g est borné sur $V \setminus \{z_0\}$. Par l'exercice 3, g est holomorphe sur V, et on définit

$$g(z_0) := \lim_{z \to z_0} g(z) = 0.$$

La fonction g admet donc un développement en série de Taylor autour de z_0 :

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall\, z \in V$$

avec $k \geq 1$ et $a_k \neq 0$ (puisque $a_0 = g(z_0) = 0$). Il s'ensuit directement que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^k}{g(z)} = \frac{1}{a_k} \neq 0$$

et donc z_0 est un pôle (d'ordre k) de f.

2. La « limite » $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ oscille et est non-bornée. En effet,

$$\lim_{x \to 0,\ x > 0} |e^{1/x}| = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \to 0} |e^{1/iy}| = 1.$$