EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 11	27 novembre 2017

Exercice 3.

(i) Par l'exercice 7 de la série 8, il existe une fonction h holomorphe sur Ω telle que $f(z) = e^h(z)$. La fonction $g(z) := e^{h(z)/n}$ est holomorphe, par composition de fonction holomorphes, et vérifie

$$g^n(z) = \left(e^{h(z)/n}\right)^n = e^{h(z)} = f(z),$$

où nous avons utilisé les exercices 3 et 4 de la série 8.

(ii) La fonction $f(z) = z$ n'a pas de racine carré holomorphe dans $\mathbb{C}$, ni même dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En effet, les seules fonctions f vérifiant $f^2 = z$ sont

$$\pm z^{1/2} = \pm e^{\log(z)/2}$$

qui ne sont même pas continues sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Rappel : La fonction $f(z) = z^\gamma$ (avec $\gamma \in \mathbb{C}$) est toujours holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus [\mathrm{Re}(z) \leq 0,\ \mathrm{Im}(z) = 0]$, mais f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\gamma \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. (i) Par l'absurde supposons que $f(\mathbb{C})$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Il existe alors $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que

$$f(\mathbb{C}) \cap B_r(z_0) = \emptyset,$$

c'est à dire,

$$|f(z) - z_0| > r, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Il s'ensuit directement que la fonction

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - z_0}, \quad z \in \mathbb{C}$$

est borné par $1/r$ et est donc constante, par le théorème de Liouville. Donc f est constante ce qui est contradictoire avec les hypothèses.

(ii) Vu que $w_0 \notin f(\mathbb{C})$, la fonction $f(z) - w_0$ ne s'annule jamais. Ainsi, vu que $\mathbb{C}$ est simplement connexe, par l'exercice 7 de la série 8, il existe h une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $e^{h(z)} = f(z) - w_0$ qui est la résultat souhaité.

Exercice 5.
Voici le calcul de la limite

$$\lim_{R\to\pm\infty}\int_0^\pi \frac{dt}{\cosh(R+it)} = 0.$$

Il est suffisant de montrer que

$$\lim_{R\to\pm\infty}\frac{1}{|\cosh(R+it)|} = 0 \quad \text{uniformément en } t\in[0,\pi],$$

pour pouvoir permuter limite et intégrale. Nous avons

$$\begin{aligned}
|\cosh(R+it)| &= \frac{1}{2}\left|e^{R+it}+e^{-R-it}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{R}e^{it}+e^{-R}e^{-it}\right| \\
&\geq \frac{1}{2}\left|\left|e^{R}e^{it}\right|-\left|e^{-R}e^{-it}\right|\right| = \frac{1}{2}\left|e^{R}-e^{-R}\right| \\
&= |\sinh(R)|.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sup_{t\in[0,\pi]}\left\{\frac{1}{|\cosh(R+it)|}\right\} \leq \frac{1}{|\sinh(R)|} \to 0 \quad \text{quand } R\to\pm\infty.$$