EPFL - Automne 2017	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 10 bis	20 novembre 2017

Exercice 1.
Les idées de la démonstration sont les suivantes. On va commencer par fixer un sous ensemble $O \subset \Omega$ ouvert et borné. On va construire une suite $f_\nu \colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $f_\nu \to f$ uniformément sur O. Ainsi, par le théorème de Weierstrass, on aura que f est holomorphe sur O. O étant quelconque, on déduira que f est holomorphe sur Ω.

Soit $O \subset \Omega$ ouvert et borné, tel que $\overline{O} \subset \Omega$. Nous allons construire une suite (f_ν) de fonctions holomorphes qui converge uniformement vers f dans O. Notons

$$M := \sup_{z \in \Omega, t \in [0,1]} |g(z,t)| < \infty$$

puisque, par hypothèse, g est bornée. Pour tout $\nu \geq 1$ soient $0 < a_\nu < b_\nu < 1$ définis par

$$a_\nu := \frac{1}{4\nu M} \quad \text{et} \quad b_\nu := 1 - \frac{1}{4\nu M}.$$

Par hypothèse, g est continue sur $\Omega \times]0,1[$. Par conséquent, g est uniformément continue sur le compact $\overline{O} \times [a_\nu, b_\nu]$, et donc il existe donc une partition de $[a_\nu, b_\nu]$, que l'on note

$$a_\nu = c_1^{(\nu)} < c_2^{(\nu)} < \cdots < c_N^{(\nu)} = b_\nu, \quad N = N(\nu) \in \mathbb{N}$$

telle que

$$\sup_{z \in \overline{O}} |g(z,t_1) - g(z,t_2)| \leq \frac{1}{2\nu}, \quad \forall\, t_1, t_2 \in [c_i^{(\nu)}, c_{i+1}^{(\nu)}],\ 1 \leq i \leq N-1.$$

Enfin, soit

$$f_\nu(z) := \sum_{i=1}^{N-1} (c_{i+1}^{(\nu)} - c_i^{(\nu)}) g\left(z, c_i^{(\nu)}\right) = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{c_i^{(\nu)}}^{c_{i+1}^{(\nu)}} g\left(z, c_i^{(\nu)}\right) dt.$$

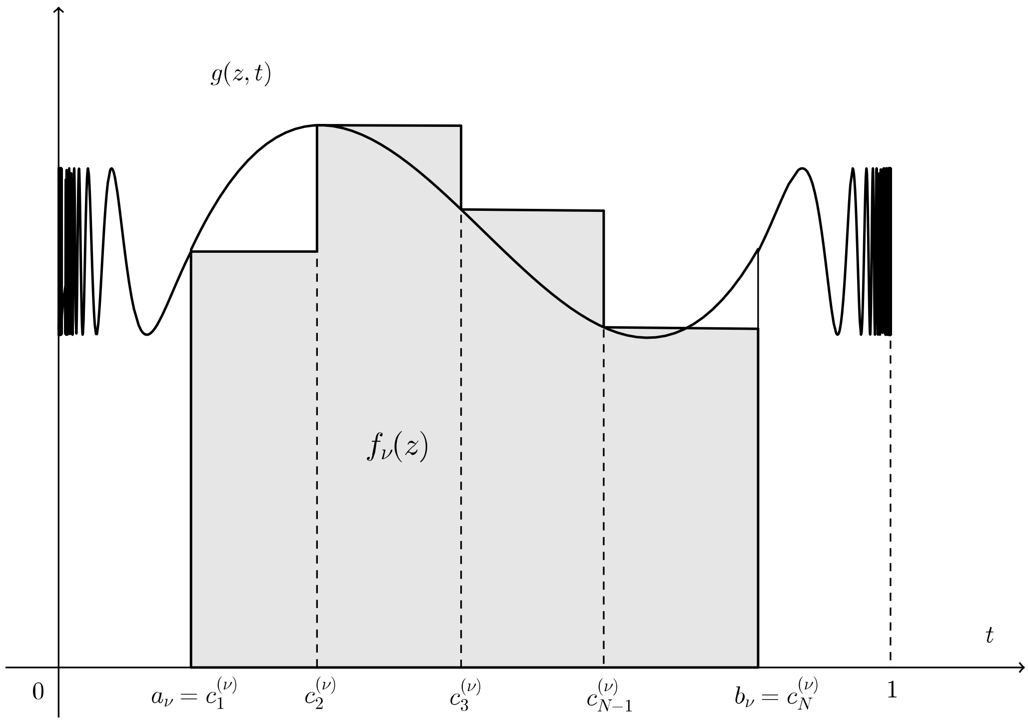
Alors, f_ν est holomorphe dans Ω. Pour tout $z \in O$, on a

$$\begin{aligned}
|f(z) - f_\nu(z)| &= \left| \int_0^{a_\nu} g(z,s) ds + \int_{b_\nu}^1 g(z,s) ds + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{c_i^{(\nu)}}^{c_{i+1}^{(\nu)}} \left(g(z,s) - g\left(z, c_i^{(\nu)}\right)\right) ds \right| \\
&\leq M a_\nu + M(1-b_\nu) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{c_{i+1}^{(\nu)} - c_i^{(\nu)}}{2\nu} \\
&\leq \frac{1}{\nu},
\end{aligned}$$

d'où

$$f_\nu \to f \quad \text{uniformément dans } O.$$

Par le théorème de Weierstrass, f est holomorphe dans O. Pour finir, O étant quelconque, f est holomorphe sur Ω.



Exercice 2.

1. Par hypothèse, nous savons que, pour tout $a \in \mathbb{C}$ (et donc en particulier dans B le disque unité dans $\mathbb{C}$), il existe $m_a \in \mathbb{N}$ avec

$$c_{m_a,a} = 0. \tag{1}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble A_n par

$$A_n := \{a \in B : c_{n,a} = 0\}.$$

   Par (1), on a que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = B.$$

   Puisque B n'est pas dénombrable, il existe nécessairement $m \in \mathbb{N}$ tel que A_m est également non-dénombrable.

2. Puisque $A_m \subset B$ et que B est borné, il existe $z_k \in A_m$ et $z \in \mathbb{C}$ (en fait aussi dans A_m) une suite telle que $z_k \neq z$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{k \to \infty} z_k = z.$$

Puisque

$$f^{(m)}(z_k) = m! c_{m,z_k} = 0,$$

on conclut par le théorème du prolongement analytique que

$$f^{(m)} \equiv 0 \quad \text{dans } \mathbb{C}.$$

Il s'ensuit directement que est f est polynôme de degré au plus $m-1$.

Exercice 3.
Comme z_0 est respectivement un zéro d'ordre k et l de p et q, on peut écrire

$$p(z) = (z - z_0)^k P(z) \quad \text{et} \quad q(z) = (z - z_0)^l Q(z),$$

où P et Q sont holomorphes et $P(z_0), Q(z_0) \neq 0$. Donc

$$f(z) = (z - z_0)^{k-l} F(z),$$

où $F(z) = P(z)/Q(z)$ est holomorphe et $F(z_0) \neq 0$.

1. Si $k \geq l$, alors $z \mapsto (z - z_0)^{k-l}$ et F sont holomorphes en z_0 et donc, z_0 est un point régulier de f.
2. Si $l > k$, alors

$$f(z)(z - z_0)^{l-k} = F(z),$$

qui est holomorphe et ne s'annule pas en z_0, par conséquent, z_0 est un pôle d'ordre $l - k$ de f.

Exercice 4.
Par l'exercice précédent, z_0 est un pôle d'ordre 1 de f. Par un théorème du cours, le résidu est donné par

$$\text{Rés}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z)}{z - z_0}} = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Exercice 5.
Par le théorème de Laurent, f admet une série de Laurent autour de 0 :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Comme f est paire, tout les coefficients impairs sont nuls, c'est-à-dire

$$c_{2k+1} = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, le résidu est nul :

$$\text{Rés}_0(f) = c_{-1} = 0.$$