EPFL - Automne 2016	Prof. B. Dacorogna
Analyse III (MA)	**Corrigé**
Série 10	20 novembre 2017

Exercice 1.
On procède comme dans l'exercice 2 de la série 9 et on obtient ($\gamma_z \subset \Omega$)

$$F(z) = \log(-1) + \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} = i\pi + \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w}\,.$$

On écrit maintenant

$$z = |z|\, e^{i\,\widetilde{\arg} z} \quad \text{où} \quad 0 \le \widetilde{\arg} z < 2\pi$$

de manière à rendre la fonction $\widetilde{\arg}$ continue dans Ω. En particulier, la relation entre $\widetilde{\arg}$ et arg (celui utilisé dans la définition de la détermination principale du logarithme) est

$$\widetilde{\arg} z = \begin{cases} \arg z & \text{si } 0 \le \arg z \le \pi \\ \arg z + 2\pi & \text{si } -\pi < \arg z < 0. \end{cases}$$

Soient alors les courbes

$$\{\gamma_1(t) = -1 + t(1 - |z|)\,,\ t \in [0,1]\}$$
$$\left\{\gamma_2(t) = |z|\, e^{i\left[\pi + t\left(\widetilde{\arg} z - \pi\right)\right]},\ t \in [0,1]\right\}.$$

On remarque que

$$\gamma_1(0) = -1, \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = -|z| \quad \text{et} \quad \gamma_2(1) = z$$

et donc la courbe $\gamma_z = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \subset \Omega$ est une courbe simple et régulière par morceaux joignant -1 à z et passant par $-|z|$. On déduit donc que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} &= \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w} = \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)}\, dt + \int_0^1 \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{(|z| - 1)\, dt}{1 + t(|z| - 1)} + \int_0^1 \frac{i\,|z|\,(\widetilde{\arg} z - \pi)\, e^{i\left[\pi + t\left(\widetilde{\arg} z - \pi\right)\right]}}{|z|\, e^{i\left[\pi + t\left(\widetilde{\arg} z - \pi\right)\right]}}\, dt\end{aligned}$$

et ainsi

$$\int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} = \left[\log(1 + t(|z| - 1))\right]_0^1 + i(\widetilde{\arg} z - \pi) = \log|z| + i(\widetilde{\arg} z - \pi)\,.$$

On a finalement

$$F(z) = \log|z| + i\,\widetilde{\arg} z.$$

Attention : ceci n'est pas la détermination principale du logarithme.

Exercice 5.
Posons $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Comme f n'a pas de singularité dans $\overline{D_{\epsilon,R}}$, on aura, par le théorème de Cauchy,

$$0 = \int_{\partial D_{\epsilon,R}} f = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

où $C_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \epsilon; \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ et $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R; \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

- Groupons d'abord la première et la troisième intégrale :
$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx = 2i \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$
En passant à la limite, nous avons donc
$$\lim_{\epsilon \to 0, R \to \infty} \left\{ \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \right\} = 2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$
- Remarquons d'abord que $\exp(i\epsilon e^{it})$ converge uniformément vers 1 lorsque $\epsilon \to 0$: pour tout $t \in [0, \pi]$,
$$\begin{aligned} \left|\exp(i\epsilon e^{it}) - 1\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\epsilon e^{it})^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(i\epsilon e^{it})^n}{n!}\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \leq |e^{\epsilon} - 1| \to 0. \end{aligned}$$
On peut donc permuter limite et intégrale, ce qui donne
$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz = \lim_{\epsilon \to 0} -i \int_{0}^{\pi} \exp(i\epsilon e^{it})dt = -i\pi.$$
- Ensuite, nous avons
$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{0}^{\pi} \left|e^{iRe^{it}}\right|\,dt = \int_{0}^{\pi} e^{-R\sin t}\,dt = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\,dt.$$
Malheureusement, $e^{-R\sin(t)}$ ne converge pas uniformément vers 0 (ni ponctuellement en $t = 0$) quand $R \to \infty$, ce qui ne nous permet pas de permuter limite et intégrale comme précédemment. En utilisant le fait que
$$\begin{cases} \sin(t) \geq t/2 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi/6 \\ \sin(t) \geq 1/2 & \text{si} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/2, \end{cases}$$
on obtient
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\,dt \leqslant \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{Rt}{2}}\,dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{R}{2}}\,dt = \frac{2}{R}\left(1 - e^{-\frac{R\pi}{12}}\right) + \frac{\pi}{3}e^{-\frac{R}{2}},$$
et donc
$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

- Pour finir, on regroupe toutes les limites :

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0, R\to\infty} \int_{\partial D_{\epsilon,R}} f = 2i \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx - i\pi$$

Et donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6.
Posons $f(z) = e^{iz^2}$. Comme f n'a pas de singularité dans D_R, on aura, par le théorème de Cauchy,

$$0 = \int_{\partial D_R} f = \int_0^R e^{ix^2}\, dx + iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2ix}} e^{ix}\, dx + e^{\frac{i\pi}{4}} \int_R^0 e^{-x^2}\, dx.$$

- La première intégrale donne les « inconnues »

$$\int_0^\infty e^{ix^2} = \int_0^\infty \cos(x^2)\, dx + i \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx.$$

- Traitons la deuxième intégrale. Comme la fonction $x \mapsto e^{iR^2 e^{2ix}}$ ne converge pas uniformément vers 0 (ni ponctuellement en $x = 0$) quand $R \to \infty$, nous ne pouvons malheureusement pas permuter limite et intégrale. La bonne technique consiste à majorer le module de l'intégrale par une fonction indépendante de x, qui converge vers 0 quand $R \to \infty$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \left| R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2ix}} e^{ix}\, dx \right| &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} |e^{iR^2 e^{2ix}} e^{ix}|\, dx = R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin(2x)} dx \\ &= \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin(x)} dx. \end{aligned}$$

En utilisant,

$$\begin{cases} \sin(t) \geq t/2 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi/6 \\ \sin(t) \geq 1/2 & \text{si} \quad \pi/6 \leq t \leq \pi/2, \end{cases}$$

on obtient

$$\frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin t}\, dt \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{R^2 t}{2}}\, dt + \frac{R}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{R^2}{2}}\, dt = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R^2\pi}{12}}\right) + \frac{R\pi}{6} e^{-\frac{R^2}{2}},$$

et donc

$$\lim_{R\to\infty} R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2ix}} e^{ix}\, dx = 0.$$

- La dernière intégrale donne directement

$$e^{\frac{i\pi}{4}} \int_{\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i)$$

- Combinant ce qui précède, nous avons

$$0 = \lim_{R\to\infty} \int_{\partial D_R} f = \int_0^{\infty} \cos(x^2)\, dx + i \int_0^{\infty} \sin(x^2)\, dx - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i),$$

autrement dit

$$\int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right)\, dx + i \int\limits_0^{\infty} \sin\left(x^2\right)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient

$$\int\limits_0^{\infty} \cos\left(x^2\right)\, dx = \int\limits_0^{\infty} \sin\left(x^2\right)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 7.

1. Par un théorème du cours, il suffit de montrer qu'il existe $v \in C^1(\Omega)$ satisfaisant les équations de Cauchy-Riemann

$$v_y = u_x \quad \text{et} \quad v_x = -u_y \quad \text{sur } \Omega$$

pour conclure que $f = u + iv$ est holomorphe. On remarque que ces équations sont équivalentes au fait que le champs vectoriel $(-u_y, u_x)$ dérive d'un potentiel. Comme Ω est simplement connexe et $u \in C^2(\Omega)$, une condition suffisante est donnée par

$$\operatorname{rot}(-u_x, u_y) = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Or cette condition est vérifiée puisque u est harmonique. On a donc trouvé un v tel que $f = u + iv$ est holomorphe. Par un théorème du cours, il s'ensuit que $u, v \in C^{\infty}(\Omega)$.

2. Utilisant les équations de Cauchy-Riemann v est unique à une constante près.
3. Soit $u = \log(\sqrt{x^2+y^2})$. Il est facile de voir que $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ et que $\Delta u = 0$. Par l'absurde supposons qu'il existe v tel que $u + iv$ est holomorphe. Alors par unicité de v à une constante près et puisque la fonction $\log(z) = \log(|z|) + i\arg(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$, on aurait que $v = \arg(z) + c$. Ceci est absurde car la fonction arg n'est pas continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.