EPFL
Section de Mathématiques
Prof. B. Dacorogna

ANALYSE III

EXAMEN **LUNDI 16.01.2017** **de 16h15 à 19h15**

Nom:	**Prénom:** ....

RÈGLEMENT:

- **Aucun document et aucune machine électronique ne sont autorisés.**
- **La carte d'étudiant est obligatoire et sera contrôlée.**
- **L'examen n'est enregistré qu'après signature par l'étudiant à la remise de sa copie.**
- **Rédigez à l'encre noire ou bleue. Toute autre couleur n'est pas autorisée.**
- **Ce qui est écrit au crayon ou en toute autre couleur que noir ou bleu ne sera pas corrigé.**
- **Les téléphones portables sont éteints et rangés dans les sacs.**

☐ J'ai lu et compris les règles ci-dessus. Signature : ....

Exercices	Points	Notes	Notes
1	7		
2	10		
3	3		
4	10		
5	10		
6	10		
Présence	10	10	10
TOTAL	60		

Exercice 1 (7 points). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ la normale extérieure unité. On dénote le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ par $\langle .; . \rangle$, c'est à dire

$$\langle x; y \rangle = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3$$

et le produit vectoriel par $\wedge$, c'est à dire

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2\, y_3 - x_3\, y_2 \\ x_3\, y_1 - x_1\, y_3 \\ x_1\, y_2 - x_2\, y_1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que si $F, G \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3\right)$, alors

$$\iiint_\Omega \left[\langle \operatorname{rot} F; G \rangle - \langle F; \operatorname{rot} G \rangle\right] dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \langle \nu \wedge F; G \rangle\; ds.$$

Exercice 2 (10 points). Montrer le théorème de Stokes pour

$$\Sigma = \left\{ x = (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 \leq 1 \right\}$$

où $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Ne pas refaire la démonstration du théorème de Stokes dans le cas général mais seulement dans le contexte du présent exercice.

Exercice 3 (3 points). Soient f et g holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. Sachant que z_0 est un zéro d'ordre k de f et d'ordre l de g avec $k \geq l$, calculer

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right].$$

Exercice 4 (10 points). Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 2}\, e^{-2\,i\,x}\, dx.$$

Exercice 5 (10 points). Soit

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} .$$

Montrer que si $f : D \to D$ est conforme, alors il existe $\alpha, a \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| < |a| = 1$ tels que

$$f(z) = a \, \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z} .$$

Suggestions. (i) Soient $|\alpha| < 1$ et

$$h_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z} .$$

Montrer que $h_\alpha : D \to D$ est holomorphe (pour montrer le fait que $h_\alpha(D) \subset D$ on pourra utiliser le principe du maximum).

(ii) Montrer que h_α est bijective de D sur D et que $h_\alpha^{-1} = h_\alpha$.

(iii) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in D$ tel que $f(\alpha) = 0$.

(iv) Poser $g = f \circ h_\alpha$, où α est tel que $f(\alpha) = 0$. Montrer, à l'aide du lemme de Schwarz, que, pour tout $z \in D$,

$$|g(z)| , \left|g^{-1}(z)\right| \leq |z| .$$

(v) Conclure de la question précédente le résultat.

Exercice 6 (10 points). Soit le problème

$$\begin{cases} Lu(z) = \left(1 - z^3\right) u'''(z) - z\, u'(z) + u(z) = 0 \\ \qquad u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = u''(0) = 0. \end{cases}$$

(i) Que devient l'équation $Lu(z) = 0$ si on fait le changement de variable

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right).$$

(ii) Trouver TOUTES les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle $Lu(z) = 0$.

(iii) Trouver une solution du problème de la forme

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, z^n$$

et déterminer son rayon de convergence.