Exercice 1 (6 points). Soient $-\infty < a < b < +\infty$, $u \in L^{\infty}(a,b)$ (avec $\|u\|_{L^\infty} \neq 0$) et $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que

$$\int_a^b |u|^n \leq \left(\int_a^b |u|^{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} (b-a)^{\frac{1}{n+1}}$$

et en conclure que

$$\frac{\left(\displaystyle\int_a^b |u|^n\right)^{\frac{1}{n}}}{(b-a)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\displaystyle\int_a^b |u|^{n+1}}{\displaystyle\int_a^b |u|^n}.$$

(ii) Montrer que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b |u|^{n+1}}{\displaystyle\int_a^b |u|^n} \leq \|u\|_{L^\infty}.$$

(iii) En se rappelant que $\lim_{n\to\infty}\left[\|u\|_{L^n}\right] = \|u\|_{L^\infty}$, déduire des deux questions précédentes que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\displaystyle\int_a^b |u|^{n+1}}{\displaystyle\int_a^b |u|^n}\right] = \|u\|_{L^\infty}.$$

Exercice 2 (8 points). Soient $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\gamma_1 > 0$ tels que

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \gamma_1 \left(|\xi|^2 + |\eta|^2\right)|\xi - \eta|, \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

(i) Montrer qu'il existe une constante $\gamma_2 > 0$ telle que

$$|f(\xi)| \leq \gamma_2 \left(1 + |\xi|^3\right), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

En déduire que si $u \in L^3(a,b)$, alors $f(u) \in L^1(a,b)$.

(ii) Soient $u, v \in L^3(a,b)$. Montrer que $u^2 v \in L^1(a,b)$.

(iii) Soient $u, v \in L^3(a,b)$ et, pour $|\epsilon| \leq 1$, on pose

$$\Phi(\epsilon) = \int_a^b f(u(x) + \epsilon\, v(x))\, dx.$$

Montrer, à l'aide des questions précédentes et du théorème de la convergence dominée, que Φ est dérivable en 0 et calculer $\Phi'(0)$.

Exercice 3 (6 points). Soit u_ν une suite de fonctions mesurables telles que $|u_\nu| \leq f$ où $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) Montrer que

$$\int \liminf_{\nu\to\infty} u_\nu \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int u_\nu \leq \limsup_{\nu\to\infty} \int u_\nu \leq \int \limsup_{\nu\to\infty} u_\nu .$$

(ii) On dénote la fonction caractéristique d'un ensemble A par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer les quatre intégrales de la question précédente pour la suite u_ν définie par

$$u_\nu(x) = \begin{cases} \chi_{[0,1]}(x) & \nu \text{ pair} \\ \chi_{]1,3]}(x) & \nu \text{ impair.} \end{cases}$$

Exercice 4 (7 points). Soit $t > 0$ et

$$L_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}.$$

(i) En se rappelant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy = 1$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_t(x)\, dx = 1.$$

(ii) Montrer (à l'aide du théorème de la convergence dominée) que pour tout $\delta > 0$ on a

$$\lim_{t\to 0^+} \left[\int_{|x|\geq\delta} L_t(x)\, dx \right] = 0.$$

(iii) Soient $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et

$$u(x,t) = \begin{cases} (f * L_t)(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to 0^+} |u(x,t) - f(x)| = 0.$$

Exercice 5 (4 points). Soient $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R})$, $2\pi-$périodique et

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-i\,n\,x}\, dx.$$

Soit c_n^k le coefficient de Fourier de $f^{(k)} = d^k f/dx^k$ c'est à dire

$$c_n^k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\, e^{-i\,n\,x}\, dx.$$

(avec la convention que $f^{(0)} = f$ et $c_n^0 = c_n$).

(i) Montrer que

$$c_n^k = (i\,n)^k\, c_n\,.$$

(ii) Montrer, à l'aide de l'identité de Parseval, que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{2\,k}\, |c_n|^2 < \infty\,.$$

(iii) A l'aide de la question précédente et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que, pour $k \geq 1$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{k-1}\, |c_n| < \infty\,.$$

Exercice 6 (7 points). Soient $f \in L^1(-\pi, \pi)$ et

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; e^{-i\,n\,x}\, dx.$$

(i) Montrer que

$$|f_n| \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{2\pi}\,.$$

Si de plus $f \in C^k(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique, où k est un entier, montrer que, pour tout $n \neq 0$,

$$|f_n| \leq \frac{\left\|f^{(k)}\right\|_{L^1}}{2\pi\,|n|^k}\,.$$

On pourra dans ce dernier cas utiliser le résultat de l'Exercice 5 (i) ci-dessus.

(ii) Soient $f \in L^1(-\pi, \pi)$ avec $\|f\|_{L^1} \leq 2\pi$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|4\,i\,n + f_n + 2\,(-1)^n| \geq 1.$$

(iii) Soient $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ avec $\|f\|_{L^1} \leq 2\pi$. Trouver formellement et sous forme de série complexe une solution de

$$4\,u'(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t)\,u(t)]\, dt + 2\,u(x-\pi) = g(x)\,.$$

(iv) Montrer que si, de plus, $g \in C^3(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique, alors la solution trouvée formellement est $C^1([-\pi, \pi])\,.$

Exercice 7 (7 points). *(i)* Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$. Trouver formellement $u = u(x,t)$ solution de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - (1+2\,t)\,u & x \in \left]0, 2\pi\right[\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(2\pi, t) & t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \left]0, 2\pi\right[\end{cases}$$

(ii) Montrer que si $f \in C^4(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique, alors pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$u(x,t) \to f(x) \quad \text{quand} \quad t \to 0.$$

On rappelle, si nécéssaire, que, si $\alpha \geq 1$, alors, pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$0 \leq 1 - e^{-\alpha\, t - t^2} \leq 3\,\alpha\, t.$$

Exercice 8 (5 points). Soit $f(x) = \pi^2 - x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ et étendue par $2\pi-$périodicité à $\mathbb{R}$.

(i) Calculer sa série de Fourier réelle. Pour quels $x \in [-\pi, \pi]$ la série converge-t-elle?

(ii) Déduire de la question précédente, en choisissant $x = \pi/2$ et en se rappelant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

que

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,s-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

(iii) Montrer, à l'aide de (i), que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$