EPFL
Section de Mathématiques
Prof. B. Dacorogna

ANALYSE III & IV

EXAMEN **MARDI 16.06.2015** **de 08h15 à 12h15**

Nom: .... **Prénom:** ....

RAPPEL:

- **Aucun document et aucune machine électronique ne sont autorisés.**
- **Les téléphones portables sont éteints et rangés dans les sacs.**
- **La carte d'étudiant est obligatoire et sera contrôlée.**
- **L'examen n'est enregistré qu'après signature par l'étudiant à la remise de sa copie.**
- **Ne rédigez pas au crayon s.v.p.**
- **Ne rédigez pas à l'encre rouge.**

Exercices	Points	Notes	Notes
1	8		
2	6		
3	5		
4	4		
5	9		
6	8		
7	10		
Présence	10	10	10
TOTAL	60		

Exercice 1 (8 points). Montrer le théorème de Green pour Ω le disque unité centré en 0 et pour F quelconque (écrire tous les détails de la démonstration).

Exercice 2 (6 points). Soient $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$F = F(x) = \left(F^1(x), \cdots, F^n(x)\right)$$

tel que $\operatorname{div} F = 0$. On définit, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$\Phi^{ij}(x) = \int_0^1 \left[F^j(tx)\, x_i - F^i(tx)\, x_j\right] t^{n-2} dt.$$

Etablir que

$$F^j(x) = \sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} \Phi^{ij}_{x_i}(x).$$

Suggestion. On montrera tout d'abord que

$$\sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} \Phi^{ij}_{x_i}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t^{n-1} F^j(tx)\right] dt.$$

Exercice 3 (5 points). Soit

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{(x^2+z^2)^2} \\ \frac{y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y}{(y^2+z^2)^2} \\ \frac{z}{(x^2+z^2)^2} + \frac{z}{(y^2+z^2)^2} \end{pmatrix}.$$

(i) Trouver le domaine de définition Ω de F. L'ensemble Ω est-il simplement connexe ?

(ii) Calculer le rotationnel de F.

(iii) F dérive-t-il d'un potentiel sur Ω ? Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse.

Exercice 4 (4 points). Montrer, à l'aide du Théorème de Rouché, que le polynôme

$$p(z) = z^6 + 4z + 2$$

a une et une seule racine dans le disque unité.

Exercice 5 (9 points). Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et telle que $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ est continue. Montrer que si $\operatorname{Re} f$ atteint son maximum en un point $a \in \Omega$, alors f est constante. En déduire que

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Re} f(z)\} = \max_{z \in \partial\Omega} \{\operatorname{Re} f(z)\}.$$

Suggestion. On montrera tout d'abord (à l'aide de la formule de la moyenne) que $\operatorname{Re} f$ est constante dans un voisinage de a, puis on déduira que f est constante dans ce voisinage et on obtiendra finalement le résultat.

Exercice 6 (8 points). (i) Soit $f(z) = z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$. Trouver sa série de Laurent en $z_0 = 0$, préciser la nature de la singularité, le résidu et le rayon de convergence.

(ii) Soient $g(z) = \frac{1}{\sin(ze^z)}$ et $z_0 = 0$. Préciser la nature de la singularité et son résidu. Donner le terme constant dans la partie régulière de la série de Laurent.

Exercice 7 (10 points). Soit l'équation ($\lambda \in \mathbb{C}$)

$$z^2 \, u'' + \left(z^4 + \lambda\right) u = 0. \tag{1}$$

(i) Trouver TOUTES les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle (1).

(ii) Trouver formellement une solution de l'équation (1) de la forme

$$u\left(z\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

quand $\lambda = -6$. Donner son rayon de convergence.