EPFL
Section de Mathématiques
Prof. B. Dacorogna

ANALYSE IV

EXAMEN **LUNDI 20.06.2016** **de 8h15 à 11h15**

Nom : .... **Prénom :** ....

RÈGLEMENT :

- **Aucun document et aucune machine électronique ne sont autorisés.**
- **La carte d'étudiant est obligatoire et sera contrôlée.**
- **L'examen n'est enregistré qu'après signature par l'étudiant à la remise de sa copie.**
- **Rédigez à l'encre noire ou bleue. Toute autre couleur n'est pas autorisée.**
- **Ce qui est écrit au crayon ne sera pas corrigé.**
- **Les téléphones portables sont éteints et rangés dans les sacs.**

☐ J'ai lu et compris les règles ci-dessus. Signature : ....

Exercices	Points	Notes	Notes
1	6		
2	4		
3	5		
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		
8	8		
9	9		
Présence	10	10	10
TOTAL	60		

Exercice 1 (6 points). Soient $1 < p < q < r < \infty$.

(i) Montrer que

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f \in L^q(\mathbb{R})$$

et

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \not\Rightarrow \quad f \in L^q(\mathbb{R})$$
$$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \not\Rightarrow \quad f \in L^q(\mathbb{R}).$$

(ii) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Hölder (et en observant qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $q = \theta\, p + (1-\theta)\, r$) que

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^r(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f \in L^q(\mathbb{R}).$$

Exercice 2 (4 points). Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive et mesurable et

$$h_k(x) = |x|^k f(x), \quad k = 0, \cdots, n.$$

(i) Montrer que si $h_0, h_n \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$h_k \in L^1(\mathbb{R}), \quad k = 1, \cdots, (n-1).$$

(ii) Montrer qu'en général

$$h_k \in L^1(\mathbb{R}), \quad \forall\, k \geq 1$$

n'implique pas $h_0 \in L^1(\mathbb{R})$.

Suggestion : on pourra pour cela choisir une fonction de la forme

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour un α approprié.

Exercice 3 (5 points). Calculer, en fonction de $\alpha \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n\alpha}^{+\infty} \frac{y\, e^{-y^2}}{1+\frac{y^2}{n^2}}\, dy.$$

Suggestion : on pourra ramener le domaine d'intégration à $\mathbb{R}$, en utilisant une fonction caractéristique

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]a, b\right[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4 (3 points). Soit $f \in L^1(-1,1)$. On définit

$$V(f) = \sup\left\{\int_{-1}^{1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx : \varphi \in C_0^1(-1,1) \text{ tel que } \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1\right\}$$

et

$$BV(-1,1) = \left\{f \in L^1(-1,1) \text{ tel que } V(f) < \infty\right\}.$$

(i) Montrer que la fonction

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1 & \text{si } x \in \,]0,1] \end{cases}$$

appartient à $BV(-1,1)$.

(ii) Montrer que $C^1([-1,1]) \underset{\neq}{\subset} BV(-1,1)$.

Exercice 5 (4 points). Soit $f \in C(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique. Soit

$$F_N\, f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; e^{-inx}\, dx.$$

Montrer que si

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty$$

alors $F_N\, f \to f$ uniformément.

Suggestion : utiliser le corollaire du théorème de Féjer pour déduire le résultat.

Exercice 6 (5 points). Soit $f \in L^1(-\pi, \pi)$ et étendue par $2\pi-$périodicité à $\mathbb{R}$ et

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx. \tag{1}$$

(i) Montrer, à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue, que si, de plus, $f \in C^1(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{n \to \infty} (n\, c_n) = 0.$$

(ii) Soit $\alpha \in \left]0, 1\right]$. Montrer que si, en outre, $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, alors il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$|c_n| \leq \frac{\gamma}{n^\alpha}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On pourra commencer par montrer que

$$c_n = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx}\, dx \tag{2}$$

puis combiner (1) et (2).

Exercice 7 (6 points). Soit $f(x) = |\sin x|$, trouver sa série de Fourier réelle et en déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Rappel : on pourra utiliser le fait que

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y.$$

Exercice 8 (8 points). Soient $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $\left|\widehat{f}\right| \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) Trouver, formellement et sous forme intégrale, une solution $u = u(x,t)$ de

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} + u = 0 & x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $u_t = \partial u/\partial t$ et $u_{xxxx} = \partial^4 u/\partial x^4$.

(ii) Montrer que la solution trouvée formellement dans la question précédente est telle que

$$u(x,t) \to f(x) \quad \text{uniformément quand } t \to 0.$$

Exercice 9 (9 points). Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique. Trouver formellement une solution $2\pi-$périodique $u = u(x)$ de

$$u'(x) + u(x) + u(x+\pi) = f(x).$$

Montrer que la solution trouvée formellement est C^1.