EPFL
Section de Mathématiques
Prof. B. Dacorogna

ANALYSE III & IV

EXAMEN **MARDI 16.06.2015** **de 08h15 à 12h15**

Nom: .... **Prénom:** ....

RAPPEL:

- **Aucun document et aucune machine électronique ne sont autorisés.**
- **La carte d'étudiant est obligatoire et sera contrôlée.**
- **L'examen n'est enregistré qu'après signature par l'étudiant à la remise de sa copie.**
- **Ne rédigez pas au crayon s.v.p.**
- **Ne rédigez pas à l'encre rouge.**

Exercices	Points	Notes	Notes
1	4		
2	6		
3	4		
4	4		
5	4		
6	6		
7	5		
8	10		
9	7		
Présence	10	10	10
TOTAL	60		

Exercice 1 (4 points). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné régulier et $\nu = \nu(x)$ la normale extérieure unité en $x \in \partial\Omega$. On dénote le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ par $\langle .; . \rangle$, c'est à dire

$$\langle x; y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \,.$$

Soit $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) + \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \operatorname{grad} u; \nu \rangle \,.$$

Montrer que $u \equiv 0$ est la seule solution du problème (1).

Suggestions. Multiplier l'équation $\Delta u = 0$ par u, puis utiliser le théorème de la divergence.

Exercice 2 (6 points). Soient $f, g \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$,

$$F(x, y, z) = (0, f(x, y, z), g(x, y, z))$$

et

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 < x, y, z < 1\right\}.$$

Vérifier le théorème de Stokes.

Exercice 3 (4 points). Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos(2\theta)}$$

Exercice 4 (4 points). Soient $n \in \mathbb{N}$, $M > 0$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que

$$|f(z)| \leq M(1 + |z|^n), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus n.

Suggestion. Procéder exactement comme dans le Théorème de Liouville (qui correspond au cas $n = 0$) en utilisant la formule intégrale de Cauchy.

Exercice 5 (4 points). Soient $u_1, \cdots, u_n \in L^1(0,1)$. Montrer à l'aide de l'inégalité de Hölder et par induction que

$$\int_0^1 (|u_1| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_0^1 |u_1| \cdots \int_0^1 |u_n| \right)^{\frac{1}{n}}$$

c'est à dire

$$\int_0^1 \left(\prod_{s=1}^n |u_s| \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{s=1}^n \int_0^1 |u_s| \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{s=1}^n \left(\int_0^1 |u_s| \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Suggestion. Observer que si $u \in L^1(0,1)$, alors $|u|^{\frac{1}{n}} \in L^n(0,1)$.

Exercice 6 (6 points). Soient $1 < p < \infty$ et $u, v \in L^p(0,1)$.

(i) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Hölder, que

$$|u|^{p-1} v \in L^1(0,1).$$

(ii) Soient $t \in \mathbb{R}$ et

$$F(t) = \int_0^1 |u(x) + tv(x)|^p \, dx.$$

Montrer, à l'aide de la question précédente et du théorème de la convergence dominée, que F est dérivable en 0 et que

$$F'(0) = p \int_0^1 |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) \, dx.$$

Suggestion. On pourra utiliser le fait qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\left| |x + ty|^p - |x|^p \right| \leq \gamma \left(|x|^{p-1} + |y|^{p-1} \right) |t| \, |y| \tag{2}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [-1, 1]$.

Exercice 7 (5 points). Donnés $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, trouver, formellement et sous forme intégrale (à l'aide de la transformée de Fourier), une fonction $u = u(x)$ satisfaisant

$$u'(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, u(x-y)\, dy = g(x)\,.$$

Trouver des conditions sur f et g pour que la solution u, trouvée formellement, soit C^1.

Exercice 8 (10 points). Soient $c < 1$ et $f \in C^1([0,\pi])$, avec

$$f(0) = f(\pi) = 0.$$

Soit $u : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $u = u(x,y)$, solution de

$$(P) \qquad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + c\,u = 0 & (x,y) \in \,]0,\pi[\, \times \,]0,\pi[\\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & y \in [0,\pi] \\ u_y(x,0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_y(x,\pi) = 0 & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

où on a dénoté les dérivées partielles de u par u_x, u_y, u_{xx} et u_{yy}.

(i) Trouver formellement une solution de (P).

(ii) Montrer que la solution trouvée à la question (i) est telle que $u \in C([0,\pi] \times \,]0,\pi])$.

Suggestion et rappel. 1) On sait que les solutions de

$$w''(t) + \mu\, w(t) = 0$$

sont données par (où a et b sont des constantes)

$$w(t) = \begin{cases} a\,\cos\left(t\sqrt{\mu}\right) + b\,\sin\left(t\sqrt{\mu}\right) & \text{si } \mu > 0 \\ a + b\,t & \text{si } \mu = 0 \\ a\,\cosh\left(t\sqrt{|\mu|}\right) + b\,\sinh\left(t\sqrt{|\mu|}\right) & \text{si } \mu < 0. \end{cases}$$

2) On rappelle que

$$\cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y = \cosh(x - y).$$

3) Pour établir le point (ii) de l'exercice, on pourra d'abord montrer le fait suivant. Soient $0 < \epsilon < \pi$ et $\alpha_n > 0$ une suite monotone telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty.$$

Prouver qu'il existe n_0, un entier suffisamment grand, et une constante $\gamma = \gamma(\epsilon, n_0) > 0$ telle que

$$0 < \frac{\cosh((\pi - y)\,\alpha_n)}{\sinh(\pi\,\alpha_n)} \leq \gamma\, e^{-\alpha_n\, y} \leq \gamma\, e^{-\alpha_n\, \epsilon}, \quad \forall\, y \in [\epsilon, \pi] \text{ et } \forall\, n \geq n_0\,.$$

Exercice 9 (7 points). Soient $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $f = -\operatorname{grad} F$. Soit le problème, $y = y(t)$,

$$\begin{cases} y''(t) = f(y(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = y_1 . \end{cases} \tag{3}$$

(i) Discuter l'existence et l'unicité des solutions de (3).

(ii) Soient y une solution de (3) sur un intervalle $]a, b[$ et

$$H(t) = \frac{1}{2} |y'(t)|^2 + F(y(t))$$

où pour $y \in \mathbb{R}^n$ on dénote la norme euclidienne par $|.|$ à savoir

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

Montrer que H est constante sur $]a, b[$.

(iii) Montrer que, s'il existe une constante M telle que

$$F(y) \geq M \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n,$$

alors la solution de (3) est globale. On pourra procéder par contradiction, tout en utilisant (ii).