Exercice 1 *(7 points). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ la normale extérieure unité. On dénote le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ par $\langle .; . \rangle$, c'est à dire*

$$\langle x; y \rangle = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3$$

et le produit vectoriel par $\wedge$, c'est à dire

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2\, y_3 - x_3\, y_2 \\ x_3\, y_1 - x_1\, y_3 \\ x_1\, y_2 - x_2\, y_1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que si $F, G \in C^1\left(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3\right)$, alors

$$\iiint_\Omega \left[\langle \operatorname{rot} F; G \rangle - \langle F; \operatorname{rot} G \rangle\right] dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \langle \nu \wedge F; G \rangle\; ds.$$

Exercice 1 Si $F = \left(F^1, F^2, F^3\right)$ et $G = \left(G^1, G^2, G^3\right)$ on a que

$$\langle \operatorname{rot} F; G \rangle = \left(F^3_{x_2} - F^2_{x_3}\right) G^1 + \left(F^1_{x_3} - F^3_{x_1}\right) G^2 + \left(F^2_{x_1} - F^1_{x_2}\right) G^3$$

$$\langle \operatorname{rot} G; F \rangle = \left(G^3_{x_2} - G^2_{x_3}\right) F^1 + \left(G^1_{x_3} - G^3_{x_1}\right) F^2 + \left(G^2_{x_1} - G^1_{x_2}\right) F^3.$$

On a, par le théorème de la divergence, que

$$\iiint_\Omega \left(F^3_{x_2} - F^2_{x_3}\right) G^1 = \iint_{\partial\Omega} \left(F^3\nu_2 - F^2\nu_3\right) G^1 ds - \iiint_\Omega \left(F^3 G^1_{x_2} - F^2 G^1_{x_3}\right)$$

$$\iiint_\Omega \left(F^1_{x_3} - F^3_{x_1}\right) G^2 = \iint_{\partial\Omega} \left(F^1\nu_3 - F^3\nu_1\right) G^2 ds - \iiint_\Omega \left(F^1 G^2_{x_3} - F^3 G^2_{x_1}\right)$$

$$\iiint_\Omega \left(F^2_{x_1} - F^1_{x_2}\right) G^3 = \iint_{\partial\Omega} \left(F^2\nu_1 - F^1\nu_2\right) G^3 ds - \iiint_\Omega \left(F^2 G^3_{x_1} - F^1 G^3_{x_2}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega \langle \operatorname{rot} F; G \rangle &= \iint_{\partial\Omega} \langle \nu \wedge F; G \rangle\; ds + \iiint_\Omega F^1 \left(G^3_{x_2} - G^2_{x_3}\right) \\ &\quad + \iiint_\Omega F^2 \left(G^1_{x_3} - G^3_{x_1}\right) + \iiint_\Omega F^3 \left(G^2_{x_1} - G^1_{x_2}\right) \end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité.

Exercice 2 *(10 points). Montrer le théorème de Stokes pour*

$$\Sigma = \left\{ x = (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 \leq 1 \right\}$$

où $f \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Ne pas refaire la démonstration du théorème de Stokes dans le cas général mais seulement dans le contexte du présent exercice.

Exercice 2 La paramétrisation naturelle de Σ est donnée par

$$\sigma = \sigma(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \text{avec} \quad (u, v) \in A = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1 \right\}$$

et celle de $\partial\Sigma$ s'écrit alors

$$\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \varphi_3(\theta)) = (\cos\theta, \sin\theta, f(\cos\theta, \sin\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

(i) Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On a

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds = \iint_A \langle \operatorname{rot} F(\sigma(u, v)) ; \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle \, du \, dv.$$

Comme

$$\operatorname{rot} F = \left(F^3_{x_2} - F^2_{x_3}, F^1_{x_3} - F^3_{x_1}, F^2_{x_1} - F^1_{x_2} \right)$$

et

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (-f_u, -f_v, 1)$$

on trouve

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds &= \iint_A \left[F^3_{x_2}(\sigma(u, v)) - F^2_{x_3}(\sigma(u, v)) \right] [-f_u(u, v)] \, du \, dv \\ &+ \iint_A \left[F^1_{x_3}(\sigma(u, v)) - F^3_{x_1}(\sigma(u, v)) \right] [-f_v(u, v)] \, du \, dv \\ &+ \iint_A \left[F^2_{x_1}(\sigma(u, v)) - F^1_{x_2}(\sigma(u, v)) \right] du \, dv. \end{aligned}$$

En regroupant les termes différemment on a

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds = R_1 + R_2 + R_3$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= -\iint_A \left[F^1_{x_2}(u, v, f(u, v)) + F^1_{x_3}(u, v, f(u, v)) \, f_v(u, v) \right] du \, dv \\ &= -\iint_A \frac{\partial}{\partial v} \left[F^1(u, v, f(u, v)) \right] du \, dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \iint_A \left[F^2_{x_1}(u, v, f(u, v)) + F^2_{x_3}(u, v, f(u, v)) \, f_u(u, v) \right] du \, dv \\ &= \iint_A \frac{\partial}{\partial u} \left[F^2(u, v, f(u, v)) \right] du \, dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 &= \iint_A \left[F^3_{x_1}(u,v,f(u,v))\, f_v - F^3_{x_2}(u,v,f(u,v))\, f_u\right] du\, dv \\ &= \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[F^3(u,v,f(u,v))\, f_v(u,v)\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[F^3(u,v,f(u,v))\, f_u(u,v)\right] \right\} du\, dv. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On a

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle F(\varphi(\theta))\,;\varphi'(\theta)\rangle\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=1}^{3} F^\nu(\varphi(\theta))\, \varphi'_\nu(\theta)\, d\theta.$$

On va montrer que

$$R_1 = \int_0^{2\pi} F^1(\varphi)\, \varphi'_1\,,\ R_2 = \int_0^{2\pi} F^2(\varphi)\, \varphi'_2\,,\ R_3 = \int_0^{2\pi} F^3(\varphi)\, \varphi'_3$$

et le théorème sera ainsi démontré. Comme $\varphi(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, f(\cos\theta, \sin\theta))$, on trouve

$$\int_0^{2\pi} F^1(\varphi(\theta))\, \varphi'_1(\theta)\, d\theta = -\int_0^{2\pi} F^1(\varphi) \sin\theta\, d\theta = \int_{\partial A} \left(F^1, 0\right) \cdot dl$$

$$\int_0^{2\pi} F^2(\varphi(\theta))\, \varphi'_2(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} F^2(\varphi) \cos\theta\, d\theta = \int_{\partial A} \left(0, F^2\right) \cdot dl$$

$$\int_0^{2\pi} F^3(\varphi(\theta))\, \varphi'_3(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} F^3(\varphi)(-\sin\theta\, f_u + \cos\theta\, f_v)\, d\theta = \int_{\partial A} \left(F^3 f_u\,, F^3 f_v\right) \cdot dl$$

on déduit, par le théorème de Green, que

$$R_1 = -\iint_A \frac{\partial}{\partial v}\left[F^1(u,v,f(u,v))\right] du\, dv = \int_{\partial A} \left(F^1, 0\right) \cdot dl$$

$$R_2 = \iint_A \frac{\partial}{\partial u}\left[F^2(u,v,f(u,v))\right] du\, dv = \int_{\partial A} \left(0, F^2\right) \cdot dl$$

$$\begin{aligned} R_3 &= \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[F^3(u,v,f(u,v))\, f_v\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[F^3(u,v,f(u,v))\, f_u\right] \right\} du\, dv \\ &= \int_{\partial A} \left(F^3\, f_u\,, F^3\, f_v\right) \cdot dl \end{aligned}$$

comme souhaité.

Exercice 3 *(3 points). Soient f et g holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. Sachant que z_0 est un zéro d'ordre k de f et d'ordre l de g avec $k \geq l$, calculer*

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right].$$

Exercice 3 Comme f est holomorphe au voisinage de z_0 on a

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots \\ &= (z - z_0)^l \left[\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!} + \sum_{n=l+1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-l} \right] \\ &= (z - z_0)^l \frac{f^{(l)}(z_0)}{l!} + (z - z_0)^l F(z) \end{aligned}$$

car z_0 est un zéro d'ordre $k \geq l$ de f. De même on obtient

$$\begin{aligned} g(z) &= (z - z_0)^l \left[\frac{g^{(l)}(z_0)}{l!} + \sum_{n=l+1}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-l} \right] \\ &= (z - z_0)^l \frac{g^{(l)}(z_0)}{l!} + (z - z_0)^l G(z) \end{aligned}$$

Donc, comme $F(z_0) = G(z_0) = 0$ et $g^{(l)}(z_0) \neq 0$, on en déduit que

$$\lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!} + F(z)}{\frac{g^{(l)}(z_0)}{l!} + G(z)} \right] = \frac{f^{(l)}(z_0)}{g^{(l)}(z_0)}.$$

Exercice 4 *(10 points). Calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2}\, e^{-2\,i\,x}\, dx.$$

Exercice 4 *Etape 1.* On pose

$$f\left(z\right) = \frac{\cos z}{z^2+2\,z+2}\, e^{-2\,i\,z} = \frac{e^{-i\,z}+e^{-3\,i\,z}}{2\left(z^2+2\,z+2\right)}\,.$$

Les seules singularités de f (qui sont des pôles d'ordre 1) sont

$$z_1 = -1+i \quad \text{et} \quad z_2 = -1-i.$$

On aura besoin plus bas de

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z_2}\left(f\right) &= \lim_{z\to z_2}\left[\left(z-z_2\right) f\left(z\right)\right] = \frac{e^{-i\,z_2}+e^{-3\,i\,z_2}}{2\left(z_2-z_1\right)} = \frac{e^{i-1}+e^{3i-3}}{-4\,i} \\
&= \frac{e^{-1}\left(\cos 1+i\sin 1\right)+e^{-3}\left(\cos 3+i\sin 3\right)}{-4\,i} \\
&= \frac{-e^{-1}\sin 1-e^{-3}\sin 3}{4} + i\,\frac{e^{-1}\cos 1+e^{-3}\cos 3}{4}\,.
\end{aligned}$$

Etape 2. Soient $r>0$ et

$$C_r = \left\{z\in\mathbb{C} : |z| = r \text{ et } \operatorname{Im} z \leq 0\right\}$$

$$L_r = \left\{z\in\mathbb{C} : -r < \operatorname{Re} z < r \text{ et } \operatorname{Im} z = 0\right\}$$

$$\Gamma_r = C_r \cup L_r\,.$$

On choisit r suffisamment grand ($r\geq 2$, par exemple) pour que $z_2 \in \operatorname{int}\Gamma_r$. Le théorème des résidus s'applique et on trouve

$$\int_{\Gamma_r} f\left(z\right) dz = 2\pi i\, \operatorname{Res}_{z_2}\left(f\right). \tag{1}$$

Par ailleurs les hypothèses ci-dessus impliquent (cf. Etape 2) que

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} f\left(z\right) dz = 0. \tag{2}$$

Comme, à partir d'un $r>0$ suffisamment grand, le membre de droite de (1) est indépendant de r et que (2) a lieu, alors

$$2\pi i\, \operatorname{Res}_{z_2}\left(f\right) = \lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r} f\left(z\right) dz = \lim_{r\to\infty}\int_{L_r} f\left(z\right) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) dx.$$

En conclusion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2}\, e^{-2\,i\,x}\, dx = 2\pi i\,\frac{-e^{-1}\sin 1-e^{-3}\sin 3}{4} - 2\pi\,\frac{e^{-1}\cos 1+e^{-3}\cos 3}{4}$$

c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\cos\left(2\,x\right)}{x^2+2x+2}\, dx = -\pi\,\frac{e^{-1}\cos 1+e^{-3}\cos 3}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \sin (2\,x)}{x^2+2x+2}\,dx = \pi\,\frac{e^{-1}\sin 1 + e^{-3}\sin 3}{2}\,.$$

Etape 3. On va maintenant montrer (2).

1) Supposons, cf. plus bas, que

$$\lim_{r\to\infty}\left[r \sup_{\theta\in[\pi,2\pi]}\left\{\left|f\left(r\,e^{i\,\theta}\right)\right|\right\}\right] = 0 \tag{3}$$

alors comme

$$\int_{C_r} f(z)\,dz = \int_{\pi}^{2\pi} f\left(r\,e^{i\,\theta}\right) i\,r\,e^{i\,\theta}\,d\theta$$

on déduit que

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,dz\right| \le \int_{\pi}^{2\pi}\left|f\left(r\,e^{i\,\theta}\right)\right|\,\left|i\,r\,e^{i\,\theta}\right|\,d\theta \le \pi\,r \sup_{\theta\in[\pi,2\pi]}\left\{\left|f\left(r\,e^{i\,\theta}\right)\right|\right\}$$

et on obtient donc de (3) que

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} f(z)\,dz = 0.$$

2) Il reste donc à montrer que (3) a lieu. On a ainsi, en se rappelant que, pour $\theta\in[\pi,2\pi]$, $\sin\theta\le 0$, que

$$\left|e^{-i\,r\,e^{i\,\theta}} + e^{-3\,i\,r\,e^{i\,\theta}}\right| \le \left|e^{-i\,r\,e^{i\,\theta}}\right| + \left|e^{-3\,i\,r\,e^{i\,\theta}}\right| = e^{r\sin\theta} + e^{3\,r\sin\theta} \le 2.$$

Par ailleurs on a, pour $|z|\ge r$ suffisamment grand,

$$\left|2\left(z^2+2\,z+2\right)\right| \ge 2\,|z|^2 - 4\,|z| - 4 \ge |z|^2 \ge r^2.$$

En combinant les deux estimations on obtient que

$$\left|f\left(r\,e^{i\,\theta}\right)\right| = \left|\frac{e^{-i\,r\,e^{i\,\theta}} + e^{-3\,i\,r\,e^{i\,\theta}}}{2\left(r\,e^{2i\,\theta} + 2\,r\,e^{i\,\theta} + 2\right)}\right| \le \frac{2}{r^2} \quad\Rightarrow\quad r\left|f\left(r\,e^{i\,\theta}\right)\right| \le \frac{2}{r}$$

ce qui implique (3).

Exercice 5 *(10 points). Soit*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} .$$

Montrer que si $f : D \to D$ est conforme, alors il existe $\alpha, a \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| < |a| = 1$ tels que

$$f(z) = a \, \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z} .$$

Suggestion. (i) *Soient $|\alpha| < 1$ et*

$$h_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z} .$$

Montrer que $h_\alpha : D \to D$ est holomorphe (pour montrer le fait que $h_\alpha(D) \subset D$ on pourra utiliser le principe du maximum).

(ii) *Montrer que h_α est bijective de D sur D et que $h_\alpha^{-1} = h_\alpha$.*

(iii) *Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in D$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

(iv) *Poser $g = f \circ h_\alpha$, où α est tel que $f(\alpha) = 0$. Montrer, à l'aide du lemme de Schwarz, que, pour tout $z \in D$,*

$$|g(z)|, \left|g^{-1}(z)\right| \le |z| .$$

(v) *Conclure de la question précédente le résultat.*

Exercice 5 *(i)* Comme $|\alpha| < 1$, on a que $1 - \overline{\alpha}\, z \neq 0$ pour tout $|z| < 1$ et donc h_α est holomorphe dans D. Montrons maintenant que $h_\alpha(D) \subset D$. Observons que

$$h_\alpha\left(e^{i\theta}\right) = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - \overline{\alpha}\, e^{i\theta}} = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{i\theta}\left(e^{-i\theta} - \overline{\alpha}\right)} = -e^{-i\theta} \frac{\alpha - e^{i\theta}}{\overline{\left(\alpha - e^{i\theta}\right)}}$$

d'où on déduit que $\left|h_\alpha\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$. Par le principe du maximum on infère que

$$|h_\alpha(z)| < 1, \quad \forall\, z \in D$$

ce qui est le résultat souhaité.

(ii) La fonction h_α est clairement injective car c'est une transformation de Möbius. Etudions maintenant la surjectivité de h_α . Soit $w \in D$, alors

$$w = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\alpha - w}{1 - \overline{\alpha}\, w}$$

à savoir $h_\alpha^{-1} = h_\alpha$.

(iii) Comme f est conforme de D sur D, il existe un unique $\alpha \in D$ tel que $f(\alpha) = 0$.

(iv) On a $g(0) = 0$ et $g : D \to D$ est holomorphe, On déduit du lemme de Schwarz que

$$|g(z)| \le |z| , \quad \forall\, z \in D.$$

Comme le même raisonnement s'applique à g^{-1}, on a aussi $\left|g^{-1}(w)\right| \le |w| , \forall\, w \in D$.

(v) De la question précédente on obtient que

$$|z| = \left|g^{-1}(w)\right| \le |w| = |g(z)| \le |z| , \quad \forall\, z \in D$$

à savoir

$$|g(z)| = |z| , \quad \forall\, z \in D.$$

En invoquant une nouvelle fois le lemme de Schwarz, on a qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| = 1$ tel que

$$g(z) = a\, z$$

ce qui implique, comme $g = f \circ h_\alpha$ et $h_\alpha^{-1} = h_\alpha$, que

$$f(z) = a\, h_\alpha(z) = a \, \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}\, z}$$

et ceci termine la démonstration.

Exercice 6 *(10 points). Soit*

$$\begin{cases} Lu\,(z) = \left(1 - z^3\right) u'''\,(z) - z\,u'\,(z) + u\,(z) = 0 \\ u\,(0) = 1 \quad et \quad u'\,(0) = u''\,(0) = 0. \end{cases}$$

(i) *Que devient l'équation $Lu\,(z) = 0$ si on fait le changement de variable*

$$t = \frac{1}{z} \quad et \quad v\,(t) = u\left(\frac{1}{t}\right).$$

(ii) *Trouver TOUTES les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle $Lu\,(z) = 0$.*

(iii) *Trouver une solution du problème de la forme*

$$u\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, z^n$$

et déterminer son rayon de convergence.

Exercice 6 *(i)* Comme

$$u'\,(z) = \frac{-1}{z^2}\, v'\left(\frac{1}{z}\right), \quad u''\,(z) = \frac{1}{z^4}\, v''\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{2}{z^3}\, v'\left(\frac{1}{z}\right)$$

et

$$u'''\,(z) = \frac{-1}{z^6}\, v'''\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{6}{z^5}\, v''\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{6}{z^4}\, v'\left(\frac{1}{z}\right)$$

l'équation devient

$$\begin{aligned} Lu\,(z) &= \left(1 - z^3\right) u'''\,(z) - z\,u'\,(z) + u\,(z) \\ &= \frac{-\left(1 - z^3\right)}{z^6}\, v'''\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{6\left(1 - z^3\right)}{z^5}\, v''\left(\frac{1}{z}\right) \\ &+ \left[\frac{-6\left(1 - z^3\right)}{z^4} + \frac{1}{z}\right] v'\left(\frac{1}{z}\right) + v\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$Lv\,(t) = \left(t^3 - t^6\right) v'''\,(t) + 6\left(t^2 - t^5\right) v''\,(t) + \left(7\,t - 6\,t^4\right) v'\,(t) + v\,(t) = 0.$$

(ii) Les singularités finies de l'équation sont quand $z^3 = 1$, i.e. $z = e^{2k\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$. Ce sont clairement des singularités régulières. Par la question précédente on voit tout de suite que $z_0 = \infty$ est une singularité régulière car

$$Lv\,(t) = t^3\left(1 - t^3\right) v'''\,(t) + 6\,t^2\left(1 - t^3\right) v''\,(t) + t\left(7 - 6\,t^3\right) v'\,(t) + v\,(t) = 0.$$

(iii) On cherche une solution de la forme

$$u\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, z^n.$$

On doit avoir

$$u\,(0) = u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u'\,(0) = u_1 = u''\,(0) = u_2 = 0.$$

On a par ailleurs que

$$z\,u'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,u_n\,z^n$$

$$u'''(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)(n+2)(n+1)\,u_{n+3}\,z^n$$

$$z^3\,u'''(z) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\,u_n\,z^n.$$

En remettant dans l'équation, on trouve

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)(n+2)(n+1)\,u_{n+3}\,z^n \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} [n(n-1)(n-2)+n-1]\,u_n\,z^n + u_1\,z + 2\,u_2\,z^2 - \left(u_0 + u_1\,z + u_2\,z^2\right).\end{aligned}$$

En se rappelant que $u_0 = 1$ et $u_1 = u_2 = 0$ on trouve que

$$u_3 = \frac{-1}{3!}\,, \quad u_4 = u_5 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+3} = \frac{(n-1)^3\,u_n}{(n+3)(n+2)(n+1)} \text{ si } n \geq 3.$$

On s'aperçoit alors que $u_{3k+1} = u_{3k+2} = 0$ et, pour tout $k = 2, 3, \cdots$,

$$u_{3k} = -\frac{(3k-1)^3\,(3k-4)^3 \cdots 5^3 2^3}{(3k)!} = -\frac{\prod_{j=1}^{k} (3j-1)^3}{(3k)!}\,.$$

Par le critère de d'Alembert, on s'aperçoit immédiatement que le rayon de convergence est 1 (ce qui est en accord avec le Théorème 13.1 du cours).