Exercice 1 (6 points). Soient $-\infty < a < b < +\infty$, $u \in L^{\infty}(a,b)$ (avec $\|u\|_{L^\infty} \neq 0$) et $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que

$$\int_a^b |u|^n \leq \left(\int_a^b |u|^{n+1} \right)^{\frac{n}{n+1}} (b-a)^{\frac{1}{n+1}}$$

et en conclure que

$$\frac{\left(\int_a^b |u|^n \right)^{\frac{1}{n}}}{(b-a)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\int_a^b |u|^{n+1}}{\int_a^b |u|^n} .$$

(ii) Montrer que

$$\frac{\int_a^b |u|^{n+1}}{\int_a^b |u|^n} \leq \|u\|_{L^\infty} .$$

(iii) En se rappelant que $\lim_{n\to\infty} [\|u\|_{L^n}] = \|u\|_{L^\infty}$, déduire des deux questions précédentes que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\int_a^b |u|^{n+1}}{\int_a^b |u|^n} \right] = \|u\|_{L^\infty} .$$

Corrigé. *(i)* De l'inégalité de Hölder on a que

$$\int_a^b (|u|^n \cdot 1) \leq \left(\int_a^b (|u|^n)^{\frac{n+1}{n}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\int_a^b 1^{n+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\int_a^b |u|^{n+1} \right)^{\frac{n}{n+1}} (b-a)^{\frac{1}{n+1}} .$$

On déduit que

$$\left(\int_a^b |u|^n \right)^{n+1} \leq \left(\int_a^b |u|^{n+1} \right)^{n} (b-a) \quad \Rightarrow \quad \frac{\int_a^b |u|^n}{(b-a)} \leq \frac{\left(\int_a^b |u|^{n+1} \right)^{n}}{\left(\int_a^b |u|^n \right)^{n}}$$

ce qui donne le résultat souhaité

$$\frac{\left(\int_a^b |u|^n \right)^{\frac{1}{n}}}{(b-a)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\int_a^b |u|^{n+1}}{\int_a^b |u|^n} .$$

(ii) Comme $|u| \leq \|u\|_{L^\infty}$ p.p., on a que

$$\int_a^b |u|^{n+1} \leq \|u\|_{L^\infty} \int_a^b |u|^n \quad \Rightarrow \quad \frac{\displaystyle\int_a^b |u|^{n+1}}{\displaystyle\int_a^b |u|^n} \leq \|u\|_{L^\infty} \ .$$

(iii) En combinant les deux questions précédentes on trouve

$$\frac{\|u\|_{L^n}}{(b-a)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\displaystyle\int_a^b |u|^{n+1}}{\displaystyle\int_a^b |u|^n} \leq \|u\|_{L^\infty} \ .$$

Comme $\lim_{n\to\infty} [\|u\|_{L^n}] = \|u\|_{L^\infty}$ et $\lim_{n\to\infty} (b-a)^{1/n} = 1$, on déduit le résultat.

Exercice 2 (8 points). Soient $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\gamma_1 > 0$ tels que

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \gamma_1 \left(|\xi|^2 + |\eta|^2\right) |\xi - \eta|\,, \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

(i) Montrer qu'il existe une constante $\gamma_2 > 0$ telle que

$$|f(\xi)| \leq \gamma_2 \left(1 + |\xi|^3\right), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

En déduire que si $u \in L^3(a,b)$, alors $f(u) \in L^1(a,b)$.

(ii) Soient $u, v \in L^3(a,b)$. Montrer que $u^2 v \in L^1(a,b)$.

(iii) Soient $u, v \in L^3(a,b)$ et, pour $|\epsilon| \leq 1$, on pose

$$\Phi(\epsilon) = \int_a^b f(u(x) + \epsilon\, v(x))\, dx.$$

Montrer, à l'aide des questions précédentes et du théorème de la convergence dominée, que Φ est dérivable en 0 et calculer $\Phi'(0)$.

Corrigé. *(i)* Par hypothèse $|f(\xi) - f(0)| \leq \gamma_1 |\xi|^3$ et donc, si $\gamma_2 = \max\{|f(0)|, \gamma_1\}$, on obtient

$$|f(\xi)| \leq |f(0)| + \gamma_1 |\xi|^3 \leq \gamma_2 \left(1 + |\xi|^3\right).$$

On infère alors que

$$\int_a^b |f(u(x))|\, dx \leq \gamma_2 (b-a) + \gamma_2 \int_a^b |u(x)|^3\, dx < \infty.$$

(ii) Par l'inégalité de Hölder on trouve

$$\left\|u^2 v\right\|_{L^1} = \int_a^b \left|u^2 v\right| \leq \left(\int_a^b \left(u^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_a^b |v|^3\right)^{\frac{1}{3}} = \|u\|_{L^3}^{2/3} \|v\|_{L^3} < \infty.$$

(iii) On commence par observer que, si $|\epsilon| \leq 1$ et comme $|\xi + \epsilon\,\eta|^2 \leq 2\left(|\xi|^2 + |\epsilon|^2 |\eta|^2\right)$, alors

$$\left|\frac{f(\xi + \epsilon\,\eta) - f(\xi)}{\epsilon}\right| \leq \gamma_1 \left(|\xi + \epsilon\,\eta|^2 + |\eta|^2\right) |\eta| \leq 2\,\gamma_1 \left(|\xi|^2 + |\eta|^2\right) |\eta|\,, \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, pour tout $|\epsilon| \leq 1$ et pour presque tout $x \in\,]a,b[$, on obtient que

$$\left|\frac{f(u(x) + \epsilon\, v(x)) - f(u(x))}{\epsilon}\right| \leq G(x) = 2\,\gamma_1 \left(|u(x)|^2 + |v(x)|^2\right) |v(x)|\,.$$

Par la question précédente on infère que $G \in L^1(a,b)$. Comme

$$\frac{f(u(x) + \epsilon\, v(x)) - f(u(x))}{\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \to 0} f'(u(x))\, v(x) \quad \text{p.p. } x \in\,]a,b[$$

on déduit par le théorème de la convergence dominée que

$$\Phi'(0) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \left[\frac{\Phi(\epsilon) - \Phi(0)}{\epsilon} \right] = \int_a^b f'(u(x))\, v(x)\, dx.$$

Exercice 3 (6 points). Soit u_ν une suite de fonctions mesurables telles que $|u_\nu| \leq f$ où $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) Montrer que

$$\int \liminf_{\nu\to\infty} u_\nu \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int u_\nu \leq \limsup_{\nu\to\infty} \int u_\nu \leq \int \limsup_{\nu\to\infty} u_\nu\,.$$

(ii) On dénote la fonction caractéristique d'un ensemble A par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer les quatre intégrales de la question précédente pour la suite u_ν définie par

$$u_\nu(x) = \begin{cases} \chi_{[0,1]}(x) & \nu \text{ pair} \\ \chi_{]1,3]}(x) & \nu \text{ impair.} \end{cases}$$

Corrigé. *(i)* Comme $f - u_\nu \geq 0$ on peut appliquer le lemme de Fatou à $v_\nu = f - u_\nu$ et on trouve

$$\int f - \int \limsup_{\nu\to\infty} u_\nu = \int \liminf_{\nu\to\infty} v_\nu \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int v_\nu \leq \int f - \limsup_{\nu\to\infty} \int u_\nu$$

et donc, en se rappelant que $\int |f| < \infty$,

$$\limsup_{\nu\to\infty} \int u_\nu \leq \int \limsup_{\nu\to\infty} u_\nu\,.$$

De même comme $f + u_\nu \geq 0$ on peut appliquer le lemme de Fatou à $v_\nu = f + u_\nu$ et on trouve

$$\int f + \int \liminf_{\nu\to\infty} u_\nu = \int \liminf_{\nu\to\infty} v_\nu \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int v_\nu \leq \int f + \liminf_{\nu\to\infty} \int u_\nu$$

et donc, en se rappelant que $\int |f| < \infty$,

$$\int \liminf_{\nu\to\infty} u_\nu \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int u_\nu\,.$$

Comme trivialement $\liminf_{\nu\to\infty} \int u_\nu \leq \limsup_{\nu\to\infty} \int u_\nu$, on a bien obtenu le résultat.

(ii) On a $\liminf_{\nu\to\infty} u_\nu(x) = 0$ et $\limsup_{\nu\to\infty} u_\nu(x) = \chi_{[0,3]}(x)$. Par conséquent on trouve que

$$0 = \int \liminf_{\nu\to\infty} u_\nu < \liminf_{\nu\to\infty} \int u_\nu = 1 < \limsup_{\nu\to\infty} \int u_\nu = 2 < \int \limsup_{\nu\to\infty} u_\nu = 3.$$

Exercice 4 (7 points). Soit $t > 0$ et

$$L_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}.$$

(i) En se rappelant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy = 1$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_t(x)\, dx = 1.$$

(ii) Montrer (à l'aide du théorème de la convergence dominée) que pour tout $\delta > 0$ on a

$$\lim_{t \to 0^+} \left[\int_{|\xi| \geq \delta} L_t(x)\, dx \right] = 0.$$

(iii) Soient $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et

$$u(x,t) = \begin{cases} (f * L^t)(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \\ f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ et } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \to 0^+} |u(x,t) - f(x)| = 0.$$

Corrigé. *(i)* Un changement de variable $x = y\sqrt{4\pi c^2 t}$ donne immédiatement le résultat.

(ii) Appelons, pour $t > 0$,

$$\chi_t(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| \geq \frac{\delta}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que $\chi_t \to 0$ qund $t \to 0$. En faisant le changement de variable $x = y\sqrt{4\pi c^2 t}$ on trouve que

$$\int_{|x| \geq \delta} L_t(x)\, dx = \int_{|y| \geq \frac{\delta}{\sqrt{4\pi c^2 t}}} e^{-\pi y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_t(|y|)\, e^{-\pi y^2} dy.$$

On note que $0 \leq v_t(y) = \chi_t(|y|)\, e^{-\pi y^2} \leq g(y) = e^{-\pi y^2}$ et que $g \in L^1(\mathbb{R})$. On peut alors appliquer le théorème de la convergence dominée pour déduire que

$$\lim_{t \to 0^+} \left[\int_{|x| \geq \delta} L_t(x)\, dx \right] = 0.$$

(iii) Comme f est bornée, il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f étant continue, on peut trouver, pour tout $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ tel que

$$|x - \xi| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

On obtient donc, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}
&|u(x,t) - f(x)| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} L_t(x-\xi)\,[f(\xi) - f(x)]\,d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} L_t(x-\xi)\,|f(\xi) - f(x)|\,d\xi
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - f(x)| &\leq 2\,M \int_{|x-\xi| \geq \delta} L_t(x-\xi)\,d\xi + \epsilon \int_{|x-\xi| < \delta} L_t(x-\xi)\,d\xi \\
&\leq 2\,M \int_{|y| \geq \delta} L_t(y)\,dy + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} L_t(y)\,dy.
\end{aligned}$$

En passant à la limite en t et en invoquant le fait que ϵ est arbitraire on a le résultat.

Exercice 5 (4 points). Soient $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R})$, $2\pi-$périodique et

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-i\,n\,x}\, dx.$$

Soit c_n^k le coefficient de Fourier de $f^{(k)} = d^k f / dx^k$ c'est à dire

$$c_n^k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\, e^{-i\,n\,x}\, dx.$$

(avec la convention que $f^{(0)} = f$ et $c_n^0 = c_n$).

(i) Montrer que

$$c_n^k = (i\,n)^k\, c_n\,.$$

(ii) Montrer, à l'aide de l'identité de Parseval, que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{2\,k}\, |c_n|^2 < \infty\,.$$

(iii) A l'aide de la question précédente et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que, pour $k \geq 1$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{k-1}\, |c_n| < \infty\,.$$

Corrigé. *(i)* On procède par induction. Le cas $k = 0$ est la définition des coefficients. Supposons donc le résultat montré pour k et montrons le pour $k+1$. On a donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} 2\pi \left[(i\,n)^k\, c_n \right] &= 2\pi\, c_n^k = \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\, e^{-i\,n\,x}\, dx \\ &= \left[\frac{f^{(k)}(x)\, e^{-i\,n\,x}}{-i\,n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(x)\, \frac{e^{-i\,n\,x}}{-i\,n}\, dx. \end{aligned}$$

En utilisant la $2\pi-$périodicité de $f^{(k)}$ et de $e^{-i\,n\,x}$, on a donc bien montré le résultat, à savoir

$$2\pi \left[(i\,n)^{k+1}\, c_n \right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(x)\, e^{-i\,n\,x}\, dx = 2\pi\, c_n^{k+1}\,.$$

(ii) On sait par (i) que

$$c_n^k = (i\,n)^k\, c_n\,.$$

Par l'identité de Parseval et comme $f^{(k)} \in L^2(-\pi, \pi)$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^{(k)}(x) \right|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| c_n^k \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{2\,k}\, |c_n|^2 < \infty.$$

(iii) Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on trouve

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{k-1} |c_n| = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{|n|} \ |n|^k |c_n| \leq \left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{|n|^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{2\,k} |c_n|^2 \right)^{1/2}$$

d'où le résultat.

Exercice 6 (7 points). Soient $f \in L^1(-\pi,\pi)$ et

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-i\,n\,x}\,dx.$$

(i) Montrer que

$$|f_n| \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{2\pi}\,.$$

Si de plus $f \in C^k(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique, où k est un entier, montrer que, pour tout $n \neq 0$,

$$|f_n| \leq \frac{\left\|f^{(k)}\right\|_{L^1}}{2\pi\,|n|^k}\,.$$

On pourra dans ce dernier cas utiliser le résultat de l'Exercice 5 (i) ci-dessus.

(ii) Soient $f \in L^1(-\pi,\pi)$ avec $\|f\|_{L^1} \leq 2\pi$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|4\,i\,n + f_n + 2\,(-1)^n| \geq 1.$$

(iii) Soient $f, g \in L^1(-\pi,\pi)$ avec $\|f\|_{L^1} \leq 2\pi$. Trouver formellement et sous forme de série complexe une solution de

$$4\,u'(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t)\,u(t)]\,dt + 2\,u(x-\pi) = g(x)\,.$$

(iv) Montrer que si, de plus, $g \in C^3(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique, alors la solution trouvée formellement est $C^1([-\pi,\pi])$.

Corrigé. *(i)* On a immédiatement que

$$|f_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-i\,n\,x}\,dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx = \frac{\|f\|_{L^1}}{2\pi}\,.$$

En combinant le fait que

$$f_n = \frac{1}{2\pi\,(i\,n)^k}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\,e^{-i\,n\,x}\,dx$$

on obtient le résultat souhaité.

(ii) Comme on sait que $|f_n| \leq 1$, on a, quand $n = 0$, que

$$|4\,i\,n + f_n + 2\,(-1)^n| = |f_0 + 2| \geq 2 - |f_0| \geq 1$$

alors que, quand $n \neq 0$, on trouve immédiatement que

$$|4\,i\,n + f_n + 2\,(-1)^n| \geq 4\,|n| - |f_n| - 2 \geq 1.$$

(iii) On écrit

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n\,e^{i\,n\,x} \quad \text{où} \quad u_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,e^{-i\,n\,x}\,dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \, e^{i\,n\,x} \quad \text{où} \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, e^{-i\,n\,x} \, dx$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \, e^{i\,n\,x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, e^{-i\,n\,x} \, dx.$$

On observe que le terme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) \, u(t)] \, dt = (f * u)(x) \, .$$

On se rappelle, par ailleurs, que les coefficients de Fourier de $(f * u)$ sont $f_n \, u_n$. En remplaçant dans l'équation on trouve

$$4\,i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \, u_n \, e^{i\,n\,x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \, u_n \, e^{i\,n\,x} + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \, e^{i\,n\,x} \, e^{i\,n\,\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \, e^{i\,n\,x}$$

et donc

$$(4\,i\,n + f_n + 2\,(-1)^n) \, u_n = g_n \, .$$

Sachant, par (ii), que $(4\,i\,n + f_n + 2\,(-1)^n) \neq 0$ pour tout n, on infère que les coefficients de u sont donnés par

$$u_n = \frac{g_n}{4\,i\,n + f_n + 2\,(-1)^n} \, .$$

(iv) Quand $g \in C^3([-\pi, \pi])$, on a, par la question (i), qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $|g_n| \leq \gamma / |n|^3$ et donc, en invoquant (ii) et (iii),

$$|u_n| \leq \frac{\gamma}{|n|^3} \, .$$

On a ainsi que les séries formelles de u et de sa dérivée convergent uniformément.

Exercice 7 (7 points). *(i)* Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$. Trouver formellement $u = u(x,t)$ solution de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - (1 + 2\,t)\,u & x \in \left]0, 2\pi\right[\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(2\pi, t) & t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \left]0, 2\pi\right[\end{cases}$$

(ii) Montrer que si $f \in C^4(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique, alors, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$u(x,t) \to f(x) \quad \text{quand} \quad t \to 0.$$

On rappelle, si nécéssaire, que, si $\alpha \geq 1$, alors, pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$0 \leq 1 - e^{-\alpha\,t - t^2} \leq 3\,\alpha\,t.$$

Corrigé. *(i) Etape 1 (Séparation des variables).* On commence par résoudre le problème

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - (1 + 2\,t)\,u & x \in \left]0, 2\pi\right[\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(2\pi, t) & t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) & t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

On cherche alors des solutions de la forme $u(x,t) = v(x)\,w(t)$. Les conditions aux limites deviennent

$$v(0) = v(2\pi) = v'(0) = v'(2\pi).$$

L'équation différentielle s'écrit alors

$$u_t = v(x)\,w'(t) = u_{xx} - (1 + 2\,t)\,u = v''(x)\,w(t) - (1 + 2\,t)\,v(x)\,w(t),$$

d'où

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda = \frac{w'(t) + (1 + 2\,t)\,w(t)}{w(t)}.$$

Les problèmes qu'on doit résoudre deviennent alors

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda\,v(x) = 0 & x \in \left]0, 2\pi\right[\\ v(0) = v(2\pi) = v'(0) = v'(2\pi) \end{cases} \tag{2}$$

et

$$w'(t) + (\lambda + 1 + 2\,t)\,w(t) = 0. \tag{3}$$

On sait que les solutions non triviales de (2) sont données par

$$\lambda = n^2 \quad \text{et} \quad v_n(x) = a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x).$$

Les solutions de (3), pour $\lambda = n^2$, sont alors

$$w_n(t) = e^{-\left(n^2+1\right)t-t^2}.$$

La solution générale de (1) est donc

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\right] e^{-\left(n^2+1\right)t-t^2}.$$

Comme on veut $u(x,0) = f(x)$, on choisit

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)\,dy$$

et si $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos(n\,y)\,dy \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sin(n\,y)\,dy.$$

(ii) Calculons

$$u(x,t) - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\right] \left[e^{-\left(n^2+1\right)t-t^2} - 1\right].$$

Comme, pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$\left|e^{-\left(n^2+1\right)t-t^2} - 1\right| = 1 - e^{-\left(n^2+1\right)t-t^2} \leq 3\left(n^2+1\right)t$$

on déduit, pour tout $0 \leq t \leq 1$, que

$$|u(x,t) - f(x)| \leq 3\,t \sum_{n=0}^{+\infty} \left[|a_n| + |b_n|\right]\left(n^2+1\right)$$

Par ailleurs, comme $f \in C^4$, on a qu'il existe une constante $\gamma_1 > 0$ telle que

$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{\gamma_1}{n^4}\,, \quad \text{si } n \geq 1.$$

En conclusion ($\gamma_2, \gamma_3 > 0$ étant des constantes), pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$|u(x,t) - f(x)| \leq \gamma_2\,t \left[|a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^4}\right] \leq \gamma_3\,t$$

et le résultat suit.

Exercice 8 (5 points). Soit $f(x) = \pi^2 - x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ et étendue par $2\pi-$périodicité à $\mathbb{R}$.

(i) Calculer sa série de Fourier réelle. Pour quels $x \in [-\pi, \pi]$ la série converge-t-elle?

(ii) Déduire de la question précédente, en choisissant $x = \pi/2$ et en se rappelant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

que

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,s-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

(iii) Montrer, à l'aide de (i), que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Corrigé. *(i)* Comme la fonction est paire tous les coefficients en sinus sont nuls et on a

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\pi^2 - y^2\right)dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2 - y^2\right)dy = \frac{2\pi^2}{3}$$

et si $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\pi^2 - y^2\right)\cos(n\,y)\,dy = \frac{-2}{\pi}\int_0^{\pi} y^2\cos(n\,y)\,dy \\
&= \frac{-2}{\pi}\left\{\left[\frac{y^2\sin(n\,y)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} y\sin(n\,y)\,dy\right\} = \frac{4}{\pi\,n}\int_0^{\pi} y\sin(n\,y)\,dy \\
&= \frac{4}{\pi\,n}\left\{\left[-\frac{y\cos(n\,y)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(n\,y)\,dy\right\} = \frac{4\,(-1)^{n+1}}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

La fonction f est Lipschitz et on peut donc lui appliquer le Théorème de Dirichlet pour déduire que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(n\,x)}{n^2}\,.$$

(ii) En particulier si $x = \pi/2$, on infère que

$$\begin{aligned}
\frac{3\pi^2}{4} &= \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2\,m+1}\cos(m\,\pi)}{(2\,m)^2} \\
&= \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{3\,m+1}}{m^2} = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{s=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\,s-1)^2} - \sum_{s=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\,s)^2}
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\,s-1)^2} = \frac{3\pi^2}{4} - \frac{2\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

(iii) Par l'identité de Parseval on trouve

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi^2 - y^2\right)^2 dy = 2\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}$$

et comme

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi^2 - y^2\right)^2 dy = \frac{16}{15}\,\pi^4$$

on déduit le résultat.