**Exercice 1** (8 points). Montrer le théorème de Green pour $\Omega$ le disque unité centré en 0 et pour $F$ quelconque (écrire tous les détails de la démonstration).

**Corrigé**. *Etape 1.* *(i)* On commence par calculer

$$-\iint_\Omega F^1_{x_2}\,dx_1dx_2 = -\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} F^1_{x_2}\,dx_1dx_2$$
$$= \int_{-1}^{1}\left[F^1\left(x_1,-\sqrt{1-x_1^2}\right)-F^1\left(x_1,\sqrt{1-x_1^2}\right)\right]dx_1\,.$$

*(ii)* On a de même

$$\iint_\Omega F^2_{x_1}\,dx_1dx_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_2^2}} F^2_{x_1}\,dx_1dx_2$$
$$= \int_{-1}^{1}\left[F^2\left(\sqrt{1-x_2^2},x_2\right)-F^2\left(-\sqrt{1-x_2^2},x_2\right)\right]dx_2\,.$$

*Etape 2.* *(i)* On écrit $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ où

$$\Gamma_1=\left\{\left(t,-\sqrt{1-t^2}\right):t:-1\to 1\right\}\quad\text{et}\quad\Gamma_2=\left\{\left(t,\sqrt{1-t^2}\right):t:1\to -1\right\}.$$

On obtient alors que

$$\int_{\partial\Omega}\left(F^1,0\right)\cdot dl = \int_{-1}^{1}\left(F^1\left(t,-\sqrt{1-t^2}\right),0\right)\cdot\left(1,\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt$$
$$-\int_{-1}^{1}\left(F^1\left(t,\sqrt{1-t^2}\right),0\right)\cdot\left(1,\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt.$$

*(ii)* On écrit ensuite $\partial\Omega=\Gamma_3\cup\Gamma_4$ où

$$\Gamma_3=\left\{\left(\sqrt{1-t^2},t\right):t:-1\to 1\right\}\quad\text{et}\quad\Gamma_4=\left\{\left(-\sqrt{1-t^2},t\right):t:1\to -1\right\}.$$

On obtient alors que

$$\int_{\partial\Omega}\left(0,F^2\right)\cdot dl = \int_{-1}^{1}\left(0,F^2\left(\sqrt{1-t^2},t\right)\right)\cdot\left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}},1\right)dt$$
$$-\int_{-1}^{1}\left(0,F^2\left(-\sqrt{1-t^2},t\right)\right)\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},1\right)dt.$$

*(iii)* Finalement, en regroupant les résultats, on a bien obtenu que

$$\iint_\Omega\left(F^2_{x_1}-F^1_{x_2}\right)dx_1dx_2=\int_{\partial\Omega}\left(F^1,F^2\right)\cdot dl.$$

**Exercice 2** (6 points). Soient $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$F = F(x) = \left(F^1(x), \cdots, F^n(x)\right)$$

tel que $\operatorname{div} F = 0$. On définit, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$\Phi^{ij}(x) = \int_0^1 \left[F^j(tx)\, x_i - F^i(tx)\, x_j\right] t^{n-2} dt.$$

Etablir que

$$F^j(x) = \sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} \Phi^{ij}_{x_i}(x).$$

*Suggestion.* On montrera tout d'abord que

$$\sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} \Phi^{ij}_{x_i}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t^{n-1} F^j(tx)\right] dt.$$

**Corrigé**. On a immédiatement que

$$\Phi^{ij}_{x_i}(x) = \int_0^1 \left[F^j(tx) + t F^j_{x_i}(tx)\, x_i - t F^i_{x_i}(tx)\, x_j\right] t^{n-2} dt.$$

On infère de ceci que

$$\sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} \Phi^{ij}_{x_i}(x)$$
$$= \int_0^1 \left[(n-1) F^j(tx) + t \left(\sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} F^j_{x_i}(tx)\, x_i - x_j \sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} F^i_{x_i}(tx)\right)\right] t^{n-2} dt.$$

Comme $\operatorname{div} F = 0$ on obtient que

$$\sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} F^i_{x_i}(tx) = -F^j_{x_j}(tx)$$

et donc

$$\sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} F^j_{x_i}(tx)\, x_i - x_j \sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} F^i_{x_i}(tx) = \sum_{i=1}^{n} F^j_{x_i}(tx)\, x_i\,.$$

On a ainsi trouvé que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} \Phi^{ij}_{x_i}(x) &= \int_0^1 \left[(n-1) F^j(tx) + t \left(\sum_{i=1}^{n} F^j_{x_i}(tx)\, x_i\right)\right] t^{n-2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t^{n-1} F^j(tx)\right] dt = F^j(x)\,.\end{aligned}$$

**Exercice 3** (5 points). Soit

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{(x^2+z^2)^2} \\ \frac{y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y}{(y^2+z^2)^2} \\ \frac{z}{(x^2+z^2)^2} + \frac{z}{(y^2+z^2)^2} \end{pmatrix}.$$

*(i)* Trouver le domaine de définition $\Omega$ de $F$. L'ensemble $\Omega$ est-il simplement connexe ?

*(ii)* Calculer le rotationnel de $F$.

*(iii)* $F$ dérive-t-il d'un potentiel sur $\Omega$ ? Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse.

**Corrigé**. *(i)* Le domaine de définition est

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus [\{x = y = 0\} \cup \{x = z = 0\} \cup \{y = z = 0\}]$$

qui n'est pas simplement connexe.

*(ii)* On trouve

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{(x^2+z^2)^2} & \frac{y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y}{(y^2+z^2)^2} & \frac{z}{(x^2+z^2)^2} + \frac{z}{(y^2+z^2)^2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*(iii)* $F$ dérive bien d'un potentiel sur $\Omega$, car

$$f(x,y,z) = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2+z^2} + \frac{1}{y^2+z^2}\right] + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$, est bien tel que

$$F = \operatorname{grad} f \quad \text{dans } \Omega.$$

**Exercice 4** (4 points). Montrer, à l'aide du Théorème de Rouché, que le polynôme

$$p(z) = z^6 + 4z + 2$$

a une et une seule racine dans le disque unité.

**Corrigé**. Soit $g(z) = z^6$ et $f(z) = 4z + 2$. Soit $\gamma$ le cercle unité. Comme, $\forall\, z \in \gamma$,

$$|g(z)| = |z|^6 = 1 < 2 = 4|z| - 2 \leq |4z + 2| = |f(z)|$$

on a que $f$ et $p = f + g$ ont exactement le même nombre de zéros dans $\operatorname{int}\gamma$, qui est le disque unité. Mais $f$ n'a évidemment qu'une seule racine qui est $-(1/2) \in \operatorname{int}\gamma$. D'où le résultat.

**Exercice 5** (9 points). Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et telle que $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ est continue. Montrer que si $\operatorname{Re} f$ atteint son maximum en un point $a \in \Omega$, alors $f$ est constante. En déduire que

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Re} f(z)\} = \max_{z \in \partial\Omega} \{\operatorname{Re} f(z)\}.$$

*Suggestion.* On montrera tout d'abord (à l'aide de la formule de la moyenne) que $\operatorname{Re} f$ est constante dans un voisinage de $a$, puis on déduira que $f$ est constante dans ce voisinage et on obtiendra finalement le résultat.

**Corrigé**. *Etape 1.* Comme $a \in \Omega$ on peut trouver $R > 0$ tel que $\overline{B_R(a)} \subset \Omega$ et

$$\operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} f(a) \quad \forall\, z \text{ tel que } |z - a| \leq R.$$

Par la formule de la moyenne on a que, pour tout $0 < r \leq R$,

$$\operatorname{Re} f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\left(a + re^{it}\right) dt$$

On trouve ainsi, comme $\operatorname{Re} f\left(a + re^{it}\right) \leq \operatorname{Re} f(a)$, que

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} f\left(a + re^{it}\right) - \operatorname{Re} f(a)] dt \leq 0.$$

Or ceci n'est possible que si

$$\operatorname{Re} f\left(a + re^{it}\right) = \operatorname{Re} f(a)$$

et donc, comme ceci est vrai pour tout $0 < r \leq R$, on déduit que

$$\operatorname{Re} f(z) \equiv \operatorname{Re} f(a) \quad \text{pour tout } |z - a| \leq R.$$

*Etape 2.* Par les équations de Cauchy-Riemann on déduit qu'on a aussi

$$\operatorname{Im} f(z) \equiv \operatorname{Im} f(a) \quad \text{pour tout } |z - a| \leq R$$

et donc $f$ est constante dans $\overline{B_R(a)}$. Par le principe du prolongement analytique $f$ est constante sur $\Omega$ et donc $\operatorname{Re} f$ est constante sur $\Omega$. De ceci on a directement que

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Re} f(z)\} = \max_{z \in \partial\Omega} \{\operatorname{Re} f(z)\}.$$

*Remarques. (i)* On peut montrer, de façon analogue, que

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Im} f(z)\} = \max_{z \in \partial\Omega} \{\operatorname{Im} f(z)\}.$$

*(ii)* Quitte à changer $f$ en $-f$ on obtient aussi que

$$\min_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Re} f(z)\} = \min_{z \in \partial\Omega} \{\operatorname{Re} f(z)\} \quad \text{et} \quad \min_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Im} f(z)\} = \min_{z \in \partial\Omega} \{\operatorname{Im} f(z)\}.$$

**Exercice 6** (8 points). *(i)* Soit $f(z) = z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$. Trouver sa série de Laurent en $z_0 = 0$, préciser la nature de la singularité, le résidu et le rayon de convergence.

*(ii)* Soient $g(z) = \frac{1}{\sin(ze^z)}$ et $z_0 = 0$. Préciser la nature de la singularité et son résidu. Donner le terme constant dans la partie régulière de la série de Laurent.

**Corrigé**. *(i)* Comme

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\, z^3} + \cdots$$

on a que la série de Laurent de $f$ est

$$\begin{aligned} f(z) = z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{4n-3}} \\ &= z^3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{4n-3}} = z^3 - \frac{1}{3!\, z} + \cdots . \end{aligned}$$

On a donc que 0 est une singularité essentielle isolée et $\mathrm{Res}_0(f) = -(1/3!)$. Le rayon de convergence est infini.

*(ii)* On voit tout de suite que 0 est un pôle d'ordre 1 et donc

$$\mathrm{Res}_0(g) = \lim_{z\to 0} [z\, g(z)] = \lim_{z\to 0} \left[\frac{1}{(e^z + ze^z)\cos(ze^z)}\right] = 1.$$

Comme la fonction $h(z) = z\, g(z)$ est holomorphe en 0 on a

$$h(z) = h(0) + h'(0)\, z + \cdots = 1 + h'(0)\, z + \cdots$$

Il nous faut donc identifier $h'(0)$ (qui est le terme constant dans la partie régulière de la série de Laurent)

$$h'(0) = \lim_{z\to 0} \left[\frac{\sin(ze^z) - z(e^z + ze^z)\cos(ze^z)}{\sin^2(ze^z)}\right] = \lim_{z\to 0} \left[\frac{z - z(1+z)}{z^2}\right] = -1$$

où on a utilisé un développement limité. On a ainsi

$$g(z) = \frac{1}{z} - 1 + \cdots .$$

**Exercice 7** (10 points). Soit l'équation ($\lambda \in \mathbb{C}$)

$$z^2\, u'' + \left(z^4 + \lambda\right) u = 0. \tag{1}$$

*(i)* Trouver TOUTES les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle (1).

*(ii)* Trouver formellement une solution de l'équation (1) de la forme

$$u\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

quand $\lambda = -6$. Donner son rayon de convergence.

**Corrigé**. *(i) Cas 1:* $\lambda = 0$. Dans ce cas l'équation est $u'' + z^2\, u = 0$ et donc il n'y a pas de singularité finie.

*Cas 2:* $\lambda \neq 0$. On a donc que $z_0 = 0$ est une singularité régulière.

Montrons maintenant que $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière. Si on fait le changement de variables

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v\,(t) = u\left(\frac{1}{t}\right)$$

l'équation devient

$$t^2\, v'' + 2\, t\, v' + \left(\frac{1}{t^4} + \lambda\right) v = 0.$$

On voit donc que $z_0 = \infty$ est bien une singularité irrégulière.

*(ii)* On trouve

$$\begin{aligned} z^2\, u'' + \left(z^4 + \lambda\right) u &= \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, u_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{n+4} + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \\ &= \lambda\,(u_0 + u_1 z) + \left((2+\lambda)\, u_2 z^2 + (6+\lambda)\, u_3 z^3\right) \\ &\quad + \sum_{n=4}^{+\infty} \left[\left(n^2 - n + \lambda\right) u_n + u_{n-4}\right] z^n. \end{aligned}$$

Comme $z^2\, u'' + \left(z^4 + \lambda\right) u = 0$, on déduit que,

$$\lambda u_0 = \lambda u_1 = 0, \quad (2+\lambda)\, u_2 = (6+\lambda)\, u_3 = 0$$

et pour tout $n = 4, 5, 6, \cdots$,

$$u_n = \frac{-u_{n-4}}{(n^2 - n + \lambda)}\,.$$

Comme $\lambda = -6$, on infère que $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ et $u_3$ est libre. Par conséquent on trouve que, pour $n = 1, 2, 3, \cdots$,

$$u_{4n} = u_{4n+1} = u_{4n+2} = 0$$

$$u_{4n+3} = \frac{-u_{4n-1}}{\left((4n+3)^2 - (4n+3) - 6\right)} = \frac{-u_{4n-1}}{16n^2 + 20n} = \frac{-u_{4(n-1)+3}}{4n\,(4n+5)}$$

et donc, par induction

$$u_{4n+3} = \frac{(-1)^n\,u_3}{4^n\,(n!)\prod_{k=1}^{n}(4k+5)}.$$

Finalement le rayon de convergence est infini car, par le critère de d'Alembert,

$$\frac{\left|u_{4n+3}z^{4n+3}\right|}{\left|u_{4n-1}z^{4n-1}\right|} = \frac{1}{16n^2+20n}\,|z|^4 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

*Remarque* Noter que ce calcul est consistant avec la méthode de Frobenius, car les racines du polynôme indiciel $q(\nu) = \nu(\nu-1) - 6$ sont $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = -2$ et donc la solution correpondant à $\nu = 3$ est bien de la forme

$$u(z) = z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{u}_n z^n$$

et c'est la seule qui soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.