Exercice 1 (6 points). Soient $1 < p < q < r < \infty$.

(i) Montrer que

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f \in L^q(\mathbb{R})$$

et

$$\begin{array}{ccc} f \in L^\infty(\mathbb{R}) & \not\Rightarrow & f \in L^q(\mathbb{R}) \\ f \in L^1(\mathbb{R}) & \not\Rightarrow & f \in L^q(\mathbb{R}). \end{array}$$

(ii) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Hölder (et en observant qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $q = \theta p + (1-\theta) r$) que

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^r(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f \in L^q(\mathbb{R}).$$

Corrigé. *(i)* On note que

$$\|f\|_{L^q}^q = \int_{\mathbb{R}} |f|^q = \int_{\mathbb{R}} |f| \, |f|^{q-1} \le \|f\|_{L^\infty}^{q-1} \int_{\mathbb{R}} |f| = \|f\|_{L^\infty}^{q-1} \|f\|_{L^1}$$

et donc la première affirmation est vraie.

- Par ailleurs la fonction $f \equiv 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ mais clairement $f \notin L^q(\mathbb{R})$.
- La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^q(\mathbb{R})$. En effet

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^q = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$$

alors, comme $1 < q$, que

$$\int_{\mathbb{R}} |f| = \int_0^1 |f| = \int_0^1 x^{-\frac{1}{q}} dx = \left[\frac{x^{1-\frac{1}{q}}}{1-\frac{1}{q}}\right]_0^1 = \frac{1}{1-\frac{1}{q}} < \infty.$$

(ii) Comme $p < q < r$, on peut trouver $\theta \in]0,1[$ tel que $q = \theta p + (1-\theta) r$, en fait

$$\theta = \frac{r-q}{r-p} \quad \text{et} \quad 1 - \theta = \frac{q-p}{r-p}.$$

On applique alors l'inégalité de Hölder avec $\alpha = 1/\theta$ (et donc $\alpha' = 1/(1-\theta)$). On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f|^q &= \int_{\mathbb{R}} |f|^{\theta p} |f|^{(1-\theta) r} \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{\theta p \alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{(1-\theta) r \alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{\frac{r-q}{r-p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^r\right)^{\frac{q-p}{r-p}} \end{aligned}$$

ou encore

$$\|f\|_{L^q}^q \le \|f\|_{L^p}^{p\,\frac{r-q}{r-p}} \|f\|_{L^r}^{q\,\frac{q-p}{r-p}}$$

ce qui nous donne le résultat souhaité.

Exercice 2 (4 points). Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive et mesurable et

$$h_k(x) = |x|^k f(x), \quad k = 0, \cdots, n.$$

(i) Montrer que si $h_0, h_n \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$h_k \in L^1(\mathbb{R}), \quad k = 1, \cdots, (n-1).$$

(ii) Montrer qu'en général

$$h_k \in L^1(\mathbb{R}), \quad \forall k \geq 1$$

n'implique pas $h_0 \in L^1(\mathbb{R})$. On pourra pour cela choisir une fonction de la forme

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour un α approprié.

Corrigé. *(i)* On a facilement que

$$\begin{aligned} \|h_k\|_{L^1} &= \int_{|x|\leq 1} |x|^k |f(x)|\, dx + \int_{|x|>1} |x|^k |f(x)|\, dx \\ &\leq \int_{|x|\leq 1} |f(x)|\, dx + \int_{|x|>1} |x|^n |f(x)|\, dx \\ &\leq \|h_0\|_{L^1} + \|h_n\|_{L^1} < \infty. \end{aligned}$$

(ii) Choisir

$$h_0(x) = f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui implique, pour tout $k \geq 1$,

$$h_k(x) = \begin{cases} x^{k-1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $h_k \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall k \geq 1$, alors que $h_0 = f \notin L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (5 points). Calculer, en fonction de $\alpha \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n\alpha}^{+\infty} \frac{y\, e^{-y^2}}{1+\frac{y^2}{n^2}}\, dy.$$

Suggestion: on pourra ramener le domaine d'intégration à $\mathbb{R}$, en utilisant une fonction caractéristique

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]a,b\right[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Corrigé. On écrit

$$\int_{n\alpha}^{+\infty} \frac{y\, e^{-y^2}}{1+\frac{y^2}{n^2}}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(n\alpha,+\infty)}(y) \frac{y\, e^{-y^2}}{1+\frac{y^2}{n^2}}\, dy.$$

On remarque que

$$\left|\chi_{(n\alpha,+\infty)}(y) \frac{y\, e^{-y^2}}{1+\frac{y^2}{n^2}}\right| = \chi_{(n\alpha,+\infty)}(y) \frac{|y|\, e^{-y^2}}{1+\frac{y^2}{n^2}} \leq g(y) = |y|\, e^{-y^2}$$

et que $g \in L^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs

$$\lim_{n\to\infty} \left[\chi_{(n\alpha,+\infty)}(y) \frac{y\, e^{-y^2}}{1+\frac{y^2}{n^2}}\right] = \begin{cases} \chi_{(0,+\infty)}(y)\, y\, e^{-y^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

On trouve donc, en invoquant le théorème de la convergence dominée, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n\alpha}^{+\infty} \frac{y\, e^{-y^2}}{1+\frac{y^2}{n^2}}\, dy = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} y e^{-y^2}\, dy = \frac{1}{2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

Exercice 4 (3 points). Soit $f \in L^1(-1,1)$. On définit

$$V(f) = \sup\left\{\int_{-1}^{1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx : \varphi \in C_0^1(-1,1) \text{ tel que } \|\varphi\|_{L^\infty} \le 1\right\}$$

et

$$BV(-1,1) = \left\{f \in L^1(-1,1) \text{ tel que } V(f) < \infty\right\}.$$

(i) Montrer que la fonction

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1 & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

appartient à $BV(-1,1)$.

(ii) Montrer que $C^1([-1,1]) \underset{\neq}{\subset} BV(-1,1)$.

Corrigé. *(i)* Clairement la fonction $H \in L^1(-1,1)$. Par ailleurs, pour $\varphi \in C_0^1(-1,1)$ tel que $\|\varphi\|_{L^\infty} \le 1$, on a que

$$\left|\int_{-1}^{1} H(x)\,\varphi'(x)\,dx\right| = \left|\int_{0}^{1} \varphi'(x)\,dx\right| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi(0)| \le 1$$

et donc $V(H) \le 1$.

(ii) Si $f \in C^1([-1,1])$, alors $f, f' \in L^1(-1,1)$ et

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx\right| = \left|\int_{0}^{1} f'(x)\,\varphi(x)\,dx\right| \le \|f'\|_{L^1}\,\|\varphi\|_{L^\infty} \le \|f'\|_{L^1}\,.$$

On a donc clairement que $C^1([-1,1]) \subset BV(-1,1)$. Le fait que $C^1([-1,1]) \neq BV(-1,1)$ suit de la question précédente.

Exercice 5 (4 points). Soit $f \in C(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique. Soit

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

Montrer que si

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty$$

alors $F_N f \to f$ uniformément.

Suggestion: utiliser le corollaire du théorème de Féjer pour déduire le résultat.

Corrigé. On observe que si $N > M$, alors, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|F_N f(x) - F_M f(x)| = \left| \sum_{M+1 \leq |n| \leq N} c_n e^{inx} \right| \leq \sum_{M+1 \leq |n| \leq N} |c_n| \, .$$

Par conséquent la suite $\{F_N f\}$ converge uniformément vers une fonction continue g donnée par

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

qui a les mêmes coefficients de Fourier que f. Par le corollaire du théorème de Féjer, on a que $f = g$ et donc $F_N f \to f$ uniformément.

Exercice 6 (5 points). Soit $f \in L^1(-\pi, \pi)$ et étendue par $2\pi-$périodicité à $\mathbb{R}$ et

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx. \tag{1}$$

(i) Montrer, à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue, que si, de plus, $f \in C^1(\mathbb{R})$, alors

$$\lim_{n \to \infty} [n \, c_n] = 0.$$

(ii) Soit $\alpha \in \left]0, 1\right]$. Montrer que si, en outre, $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, alors il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$|c_n| \leq \frac{\gamma}{n^\alpha}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On pourra commencer par montrer que

$$c_n = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-inx} \, dx \tag{2}$$

puis combiner (1) et (2).

Corrigé. *(i)* On intègre par parties

$$2\pi \, c_n = \left[-\frac{f(x) e^{-inx}}{in}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} \, dx.$$

Par le lemme de Riemann-Lebesgue on a que

$$\lim_{n \to \infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} \, dx\right] = 0$$

et le résultat suit immédiatement.

(ii) En faisant un changement de variable $x = y + \frac{\pi}{n}$ on trouve, en utilisant la $2\pi-$périodicité de f, que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi - \frac{\pi}{n}}^{\pi - \frac{\pi}{n}} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right) e^{-in\left(y + \frac{\pi}{n}\right)} \, dy = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right) e^{-iny} \, dy.$$

On déduit de cela que

$$c_n = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\right] e^{-inx} \, dx.$$

Comme f est Hölder continue on obtient qu'il existe une constante γ_1 telle que

$$\left|f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\right| \leq \gamma_1 \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha$$

et ainsi

$$|c_n| \leq \frac{\gamma_1 \pi^\alpha}{2 \, n^\alpha} = \frac{\gamma}{n^\alpha}.$$

Exercice 7 (6 points). Soit $f(x) = |\sin x|$, trouver sa série de Fourier réelle et en déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}\,.$$

Rappel: on pourra utiliser le fait que

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y.$$

Corrigé. *(i)* Comme f est paire, les coefficients en sinus sont nuls et on a donc

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\right] dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos((n-1)x)}{n-1} - \frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n-1}-1}{(n-1)\pi} - \frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)\pi}
\end{aligned}$$

et ainsi

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{-4}{(n^2-1)\pi} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

On a ainsi trouvé, comme f est C^1 par morceaux que

$$f(x) = F f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\,.$$

(ii) De l'identité de Parseval on a que

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}$$

et on infère alors que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 8 (8 points). Soient $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $\left|\widehat{f}\right| \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) Trouver, formellement et sous forme intégrale, une solution $u = u(x,t)$ de

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} + u = 0 & x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $u_t = \partial u / \partial t$ et $u_{xxxx} = \partial^4 u / \partial x^4$.

(ii) Montrer que la solution trouvée formellement dans la question précédente est telle que

$$u(x,t) \to f(x) \quad \text{uniformément quand } t \to 0.$$

Corrigé. *(i)*. On dénote par $v(\alpha,t)$ la transformée de Fourier en x (t jouant le rôle d'un paramètre) de $u(x,t)$, par abus de notations on écrira $\mathfrak{F}(u)$, i.e.

$$v(\alpha,t) = \mathfrak{F}(u)(\alpha,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-2\pi i \alpha x} dx$$

on a de plus que

$$v(\alpha,0) = \mathfrak{F}(f)(\alpha) = \widehat{f}(\alpha).$$

Les propriétés des transformées de Fourier nous permettent d'écrire

$$\begin{cases} \mathfrak{F}(u_{xxxx})(\alpha,t) = (2\pi i \alpha)^4 \mathfrak{F}(u)(\alpha,t) = (2\pi\alpha)^4 v(\alpha,t) \\ \mathfrak{F}(u_t)(\alpha,t) = v_t(\alpha,t). \end{cases}$$

En revenant au problème donné, on applique la transformée de Fourier (en x) aux deux membres de l'équation et on se ramène au système suivant

$$\begin{cases} v_t(\alpha,t) = -\left[(2\pi\alpha)^4 + 1\right] v(\alpha,t) & t > 0 \\ v(\alpha,0) = \widehat{f}(\alpha) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En considérant α comme un paramètre, on trouve que la solution est donnée par

$$v(\alpha,t) = \widehat{f}(\alpha)\, e^{-\left[(2\pi\alpha)^4+1\right]t}.$$

La solution du problème est donc obtenue en appliquant la transformée de Fourier inverse

$$u(x,t) = \mathfrak{F}^{-1}(v(\alpha,t))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\, e^{-\left[(2\pi\alpha)^4+1\right]t} e^{2\pi i \alpha x} d\alpha.$$

Noter que l'intégrande est clairement $L^1(\mathbb{R})$ et donc le membre de droite est bien défini.

(ii) Montrons maintenant que

$$u(x,t) \to f(x) \quad \text{uniformément quand } t \to 0.$$

Comme $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $\left|\widehat{f}\right| \in L^1(\mathbb{R})$, on a par la formule d'inversion de Fourier que

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}\left(\widehat{f}\right)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\alpha)\, e^{2\pi i\alpha x} d\alpha.$$

En combinant les deux formules on déduit que

$$\begin{aligned} |u(x,t) - f(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(\alpha)\right| \left|e^{-\left[(2\pi\alpha)^4+1\right]t} e^{2\pi i\alpha x} - e^{2\pi i\alpha x}\right| d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f}(\alpha)\right| \left(1 - e^{-\left[(2\pi\alpha)^4+1\right]t}\right) d\alpha. \end{aligned}$$

Si on note

$$s_t(\alpha) = \left|\widehat{f}(\alpha)\right| \left(1 - e^{-\left[(2\pi\alpha)^4+1\right]t}\right) \leq \left|\widehat{f}(\alpha)\right|$$

on a que $s_t \to 0$ quand $t \to 0$. Comme $\left|\widehat{f}\right| \in L^1(\mathbb{R})$, on déduit, par le théorème de la convergence dominée, le résultat souhaité.

Exercice 9 (9 points). Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $2\pi-$périodique. Trouver formellement une solution $2\pi-$périodique $u = u(x)$ de

$$u'(x) + u(x) + u(x+\pi) = f(x).$$

Montrer que la solution trouvée formellement est C^1.

Corrigé. *(i)* On procède formellement. On écrit

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos(nx) + g_n \sin(nx))$$

et on cherche une solution de la forme

$$u(x) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \cos(nx) + v_n \sin(nx)).$$

On observe que

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-nu_n \sin(nx) + nv_n \cos(nx))$$

$$u(x+\pi) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n u_n \cos(nx) + (-1)^n v_n \sin(nx))$$

et donc

$$\begin{aligned} u'(x) + u(x) + u(x+\pi) = u_0 &+ \sum_{n=1}^{\infty} [(nv_n + (1+(-1)^n) u_n) \cos(nx)] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [(-nu_n + (1+(-1)^n) v_n) \sin(nx)]. \end{aligned}$$

En remettant dans l'équation et en égalant les coefficients on déduit que

$$u_0 = \frac{f_0}{2}, \quad nv_n + (1+(-1)^n) u_n = f_n, \quad -nu_n + (1+(-1)^n) v_n = g_n$$

et par conséquent, en posant $a = 1 + (-1)^n$,

$$u_0 = \frac{f_0}{2}, \quad u_n = \frac{af_n - ng_n}{n^2 + a^2}, \quad v_n = \frac{nf_n + ag_n}{n^2 + a^2}.$$

(ii) Comme $f \in C^2$, on déduit qu'il existe une constante γ_1 telle que

$$|f_n| + |g_n| \leq \frac{\gamma_1}{n^2}, \quad \forall n \geq 1.$$

On a ainsi qu'il existe une constante γ_2 telle que

$$|u_n| + |v_n| \leq \frac{\gamma_2}{n^3}, \quad \forall n \geq 1.$$

De ceci on obtient que si

$$F_N u\,(x) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(u_n \cos(nx) + v_n \sin(nx)\right),$$

alors $F_N\,u \to u$ et $(F_N\,u)' \to u'$ uniformément et le résultat suit.