Exercice 1 (4 points). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné régulier et $\nu = \nu(x)$ la normale extérieure unité en $x \in \partial\Omega$. On dénote le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$ par $\langle .; . \rangle$, c'est à dire

$$\langle x; y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \,.$$

Soit $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) + \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \operatorname{grad} u; \nu \rangle \,.$$

Montrer que $u \equiv 0$ est la seule solution du problème (1).

Suggestions. Multiplier l'équation $\Delta u = 0$ par u, puis utiliser le théorème de la divergence.

Corrigé. On observe que

$$0 = u\,\Delta u = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) - \langle \operatorname{grad} u; \operatorname{grad} u \rangle \,.$$

Et donc, en utilisant le théorème de la divergence on trouve

$$0 = \int_{\partial\Omega} u \langle \operatorname{grad} u; \nu \rangle \, ds - \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u(x)|^2 \, dx.$$

Finalement, en invoquant le fait que $(\partial u / \partial \nu) = -u$ sur $\partial\Omega$, on obtient

$$0 = -\int_{\partial\Omega} |u(x)|^2 \, ds - \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u(x)|^2 \, dx$$

et donc $\operatorname{grad} u = 0$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Par conséquent $u \equiv 0$, comme souhaité.

Exercice 2 (6 points). Soient $f, g \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$,

$$F\left(x,y,z\right) = \left(0, f\left(x,y,z\right), g\left(x,y,z\right)\right)$$

et

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ 0 < x,y,z < 1\right\}.$$

Vérifier le théorème de Stokes.

Corrigé. **(i)** Calcul de $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & f & g \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} g_y - f_z \\ -g_x \\ f_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_z \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_y \\ -g_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs on a

$$\Sigma = \left\{\sigma\left(\theta,z\right) = \left(\cos\theta, \sin\theta, z\right) : \left(\theta,z\right) \in A = \left]0,\pi/2\right[\times \left]0,1\right[\right\}$$

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
&\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds \\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(-f_z\left(\cos\theta,\sin\theta,z\right), 0, f_x\left(\cos\theta,\sin\theta,z\right)\right) \cdot \left(\cos\theta,\sin\theta,0\right) d\theta\, dz \\
&+ \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(g_y\left(\cos\theta,\sin\theta,z\right), -g_x\left(\cos\theta,\sin\theta,z\right), 0\right) \cdot \left(\cos\theta,\sin\theta,0\right) d\theta\, dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{d}{dz}\left[f\left(\cos\theta,\sin\theta,z\right)\right]\cos\theta\right] d\theta\, dz \\
&+ \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{d}{d\theta}\left[g\left(\cos\theta,\sin\theta,z\right)\right]\right] d\theta\, dz
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^{\pi/2} \left[f\left(\cos\theta,\sin\theta,0\right) - f\left(\cos\theta,\sin\theta,1\right)\right]\cos\theta\, d\theta \\
&+ \int_0^1 \left[g\left(0,1,z\right) - g\left(1,0,z\right)\right] dz\,.
\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Observer que

$$\sigma\left(\partial A\right) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta,0) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\,,\ \theta : 0 \to \pi/2\} \\
\Gamma_2 &= \{\gamma_2(z) = \sigma(\pi/2, z) = (0,1,z)\,,\ z : 0 \to 1\} \\
\Gamma_3 &= \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta,1) = (\cos\theta, \sin\theta, 1)\,,\ \theta : \pi/2 \to 0\} \\
\Gamma_4 &= \{\gamma_4(z) = \sigma(0, z) = (1,0,z)\,,\ z : 1 \to 0\}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec Γ_1 et Γ_2 parcourues positivement et Γ_3 et Γ_4 parcourues négativement. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^{\pi/2} (0, f(\cos\theta, \sin\theta, 0), g(\cos\theta, \sin\theta, 0)) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} f(\cos\theta, \sin\theta, 0) \cos\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_0^1 (0, f(0,1,z), g(0,1,z)) \cdot (0,0,1)\, dz = \int_0^1 g(0,1,z)\, dz$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} F \cdot dl &= -\int_0^{\pi/2} (0, f(\cos\theta, \sin\theta, 1), g(\cos\theta, \sin\theta, 1)) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta \\
&= -\int_0^{\pi/2} f(\cos\theta, \sin\theta, 1) \cos\theta\, d\theta
\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_4} F \cdot dl = -\int_0^1 (0, f(1,0,z), g(1,0,z)) \cdot (0,0,1)\, dz = -\int_0^1 g(1,0,z)\, dz.$$

On a finalement

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = &\int_0^{\pi/2} [f(\cos\theta, \sin\theta, 0) - f(\cos\theta, \sin\theta, 1)] \cos\theta\, d\theta \\
&+ \int_0^1 [g(0,1,z) - g(1,0,z)]\, dz
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 3 (4 points). Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos(2\theta)}\,.$$

Corrigé. On pose $z = e^{i\theta}$ et on a donc

$$\cos(2\theta) = \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{z^4+1}{2\,z^2}\,.$$

Soit γ le cercle unité et on pose

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(z) &= -\frac{z}{i}\,\frac{2}{z^4-4z^2+1}\\ &= -\frac{z}{i}\,\frac{2}{\left(z^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\left(z^2-\left(2-\sqrt{3}\right)\right)}\,.\end{aligned}$$

On déduit du théorème des résidus que

$$\int_\gamma \widetilde{f}(z)\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos(2\theta)} = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}_{z_k}\left(\widetilde{f}\right),$$

où z_k sont les singularités de $\widetilde{f}$ à l'intérieur du cercle unité γ, à savoir

$$z_1 = \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

qui sont des pôles d'ordre 1. On obtient

$$\mathrm{Res}_{z_1}\left(\widetilde{f}\right) = -\lim_{z\to z_1}\frac{2z}{i\left(z^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)(z+z_1)} = \frac{1}{2i\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{Res}_{z_2}\left(\widetilde{f}\right) = -\lim_{z\to z_2}\frac{2z}{i\left(z^2-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)(z+z_2)} = \frac{1}{2i\sqrt{3}}$$

et ainsi

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\cos(2\theta)} = 2\pi i\,\frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Exercice 4 (4 points). Soient $n \in \mathbb{N}$, $M > 0$ et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que

$$|f(z)| \leq M(1 + |z|^n), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus n.

Suggestion. Procéder exactement comme dans le Théorème de Liouville (qui correspond au cas $n = 0$) en utilisant la formule intégrale de Cauchy.

Corrigé. Par la formule intégrale de Cauchy on a que

$$f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+2}} \, dz$$

où γ est le cercle centré en z_0 et de rayon R. Le résultat sera prouvé si nous montrons que

$$f^{(n+1)}(z_0) = 0, \quad \forall z_0 .$$

De la formule on obtient immédiatement que

$$\left| f^{(n+1)}(z_0) \right| \leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \frac{M(1 + R^n)}{R^{n+2}} 2\pi R.$$

Or le membre de droite tend vers 0 quand R tend vers l'infini. Le résultat est donc démontré.

Exercice 5 (4 points). Soient $u_1, \cdots, u_n \in L^1(0,1)$. Montrer à l'aide de l'inégalité de Hölder et par induction que

$$\int_0^1 (|u_1| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_0^1 |u_1| \cdots \int_0^1 |u_n| \right)^{\frac{1}{n}}$$

c'est à dire

$$\int_0^1 \left(\prod_{s=1}^n |u_s| \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{s=1}^n \int_0^1 |u_s| \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{s=1}^n \left(\int_0^1 |u_s| \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Suggestion. Observer que si $u \in L^1(0,1)$, alors $|u|^{\frac{1}{n}} \in L^n(0,1)$.

Corrigé. Le résultat est trivialement vrai si $n = 1$. Supposons le montré pour $n-1$ et montrons le pour n. L'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (|u_1| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} &= \int_0^1 |u_1|^{\frac{1}{n}} (|u_2| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(|u_1|^{\frac{1}{n}} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 \left((|u_2| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&= \left(\int_0^1 |u_1| \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 (|u_2| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse d'induction on obtient

$$\int_0^1 (|u_1| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_0^1 |u_1| \right)^{\frac{1}{n}} \left(\left(\int_0^1 |u_2| \cdots \int_0^1 |u_n| \right)^{\frac{1}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

ce qui est exactement ce que nous devions démontré.

Exercice 6 (6 points). Soient $1 < p < \infty$ et $u, v \in L^p(0,1)$.

(i) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Hölder, que

$$|u|^{p-1} v \in L^1(0,1).$$

(ii) Soient $t \in \mathbb{R}$ et

$$F(t) = \int_0^1 |u(x) + tv(x)|^p \, dx.$$

Montrer, à l'aide de la question précédente et du théorème de la convergence dominée, que F est dérivable en 0 et que

$$F'(0) = p \int_0^1 |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) \, dx.$$

Suggestion. On pourra utiliser le fait qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\left| |x + ty|^p - |x|^p \right| \le \gamma \left(|x|^{p-1} + |y|^{p-1} \right) |t| \, |y| \tag{2}$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [-1, 1]$.

Corrigé. **(i)** Par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}\left\| |u|^{p-1} v \right\|_{L^1} &= \int_0^1 \left| |u|^{p-1} v \right| \le \left(\int_0^1 \left(|u|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^1 |v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 |u|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^1 |v|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p}^{p-1} \|v\|_{L^p} .\end{aligned}$$

(ii) On pose, pour $t \in [-1, 1]$,

$$f_t(x) = \frac{|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p}{t}$$

de manière que

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} = \int_0^1 f_t(x) \, dx$$

On observe ensuite, à l'aide de l'inégalité (2), que

$$|f_t(x)| \le \gamma \left(|u(x)|^{p-1} |v(x)| + |v(x)|^p \right) = g(x).$$

Par la première question $g \in L^1(0,1)$. Comme

$$\lim_{t \to 0} f_t(x) = p \, |u(x)|^{p-2} u(x) v(x)$$

on peut appliquer le théorème de la convergence dominée et trouver

$$F'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = p \int_0^1 |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) \, dx.$$

Exercice 7 (5 points). Donnés $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, trouver, formellement et sous forme intégrale (à l'aide de la transformée de Fourier), une fonction $u = u(x)$ satisfaisant

$$u'(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, u(x-y)\, dy = g(x)\,.$$

Trouver des conditions sur f et g pour que la solution u, trouvée formellement, soit C^1.

Corrigé. Soit

$$\widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi x} u(x)\, dx.$$

On a donc, en prenant la transformée de Fourier de l'équation,

$$(2\pi i \xi)\, \widehat{u}(\xi) + \widehat{u}(\xi)\, \widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

et ainsi

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{2\pi i \xi + \widehat{f}(\xi)}\,.$$

Notons par h le membre de droite, à savoir

$$h(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{2\pi i \xi + \widehat{f}(\xi)}\,.$$

Par conséquent, en utilisant la formule d'inversion de Fourier, on obtient

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}(h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x}\, h(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Appelons H le membre de droite, à savoir

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x}\, h(\xi)\, d\xi.$$

Pour que la solution u, trouvée formellement dans (3), soit C^1, il suffit de supposer que

- $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, pour que $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ aient un sens,
- $\xi \to |h(\xi)|$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, pour que $H \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (cf. Théorème 18.2 (i)),
- $\xi \to |\xi\, h(\xi)|$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, pour que $H' \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (cf. Théorème 18.2 (i) et (iv)),
- $|\widehat{g}| \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C^0(\mathbb{R})$ pour que (cf. Théorème 18.5)

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x}\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

On a alors

$$H'(x) + (H * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi i \, e^{2\pi i \xi x} \, \xi \, h(\xi) \, d\xi$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi (x-y)} \, h(\xi) \, d\xi \right] f(y) \, dy \right\}$$

et donc (en permutant les intégrales)

$$H' + H * f$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi i \, e^{2\pi i \xi x} \, \xi \, h(\xi) \, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi y} f(y) \, dy \right] e^{2\pi i \xi x} \, h(\xi) \, d\xi \right\}.$$

On a ainsi bien trouvé

$$H' + H * f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} \, h(\xi) \left[2\pi i \xi + \widehat{f}(\xi) \right] d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} \, \widehat{g}(\xi) \, d\xi = g.$$

Exercice 8 (10 points). Soient $c < 1$ et $f \in C^1([0, \pi])$, avec

$$f(0) = f(\pi) = 0.$$

Soit $u : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$, solution de

$$(P) \qquad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + c\,u = 0 & (x, y) \in \,]0, \pi[\, \times \,]0, \pi[\\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & y \in [0, \pi] \\ u_y(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_y(x, \pi) = 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

où on a dénoté les dérivées partielles de u par u_x, u_y, u_{xx} et u_{yy}.

(i) Trouver formellement une solution de (P).

(ii) Montrer que la solution trouvée à la question (i) est telle que $u \in C([0, \pi] \times \,]0, \pi])$.

Suggestion et rappel. 1) On sait que les solutions de

$$w''(t) + \mu\, w(t) = 0$$

sont données par (où a et b sont des constantes)

$$w(t) = \begin{cases} a\,\cos\left(t\sqrt{\mu}\right) + b\,\sin\left(t\sqrt{\mu}\right) & \text{si } \mu > 0 \\ a + b\,t & \text{si } \mu = 0 \\ a\,\cosh\left(t\sqrt{|\mu|}\right) + b\,\sinh\left(t\sqrt{|\mu|}\right) & \text{si } \mu < 0. \end{cases}$$

2) On rappelle que

$$\cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y = \cosh(x - y).$$

3) Pour établir le point (iii) de l'exercice, on pourra d'abord montrer le fait suivant. Soient $0 < \epsilon < \pi$ et $\alpha_n > 0$ une suite monotone telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty.$$

Prouver qu'il existe n_0, un entier suffisamment grand, et une constante $\gamma = \gamma(\epsilon, n_0) > 0$ telle que

$$0 < \frac{\cosh((\pi - y)\,\alpha_n)}{\sinh(\pi\,\alpha_n)} \leq \gamma\, e^{-\alpha_n\, y} \leq \gamma\, e^{-\alpha_n\, \epsilon}, \quad \forall\, y \in [\epsilon, \pi] \text{ et } \forall\, n \geq n_0.$$

Corrigé. (i) *Etape 1 (séparation des variables).* On va résoudre tout d'abord le problème

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + c\,u = 0 & (x, y) \in \,]0, \pi[\, \times \,]0, \pi[\\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & y \in [0, \pi] \end{cases} \tag{4}$$

et en cherchant des solutions de la forme

$$u(x,y) = v(x)\, w(y)\,.$$

On trouve

$$\begin{cases} v''(x)\, w(y) + v(x)\, w''(y) + c\, v(x)\, w(y) = 0 \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

et par conséquent

$$\begin{cases} \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda = -\frac{w''(y) + c\, w(y)}{w(y)} \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{cases}$$

On déduit alors les deux systèmes

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda\, v(x) = 0 \quad x \in \left]0, \pi\right[\\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

et

$$w''(y) + (c - \lambda)\, w(y) = 0. \tag{6}$$

On sait que les solutions non triviales de (5) sont données par

$$\lambda = n^2 \geq 1 \quad \text{et} \quad v_n(x) = \sin(nx)$$

tandis que les solutions de (6) sont données par (noter que comme $c < 1$ et $n^2 \geq 1$ on a que $\left(n^2 - c\right) > 0$)

$$w_n(y) = a_n \cosh\left(y\sqrt{n^2 - c}\right) + b_n \sinh\left(y\sqrt{n^2 - c}\right).$$

Comme l'équation (4) est linéaire, on a que sa solution générale est donnée (on rappelle que le raisonnement est purement heuristique) par

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cosh\left(y\sqrt{n^2 - c}\right) + b_n \sinh\left(y\sqrt{n^2 - c}\right)\right] \sin(nx)\,. \tag{7}$$

Etape 2 (conditions aux limites). Pour résoudre (P) il faut encore satisfaire aux deux conditions aux limites

$$u_y(x,0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_y(x,\pi) = 0.$$

Pour cela on dérive (7) par rapport à y

$$u_y(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^2 - c}\right) \left[a_n \sinh\left(y\sqrt{n^2 - c}\right) + b_n \cosh\left(y\sqrt{n^2 - c}\right)\right] \sin(nx)\,.$$

On choisit alors les constantes b_n pour que $u_y(x,0) = f(x)$, c'est à dire

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left(\sqrt{n^2 - c}\right) \sin(nx)$$

et donc

$$b_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{n^2 - c}} \int_0^\pi f(x) \sin(nx)\, dx. \tag{8}$$

Les coefficients a_n sont obtenus en écrivant (comme on veut $u_y(x, \pi) = 0$)

$$0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n^2 - c} \left[a_n \sinh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right) + b_n \cosh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right) \right] \sin(nx)$$

et ainsi

$$\sqrt{n^2 - c} \left[a_n \sinh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right) + b_n \cosh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right) \right] = 0.$$

On infère donc que

$$a_n = -b_n \frac{\cosh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right)}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right)}.$$

La solution est donc de la forme

$$\begin{aligned} & u(x, y) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[-\frac{\cosh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right)}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right)} \cosh\left(y\sqrt{n^2 - c}\right) + \sinh\left(y\sqrt{n^2 - c}\right) \right] \sin(nx) \end{aligned}$$

ou encore

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{-b_n \cosh\left((\pi - y)\sqrt{n^2 - c}\right)}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right)} \right] \sin(nx). \tag{9}$$

(ii) 1) Commençons par prouver qu'il existe n_0, un entier suffisamment grand, et une constante $\gamma = \gamma(\epsilon, n_0) > 0$ telle que

$$0 < \frac{\cosh((\pi - y)\alpha_n)}{\sinh(\pi\alpha_n)} \leq \gamma e^{-\alpha_n y} \leq \gamma e^{-\alpha_n \epsilon}, \quad \forall y \in [\epsilon, \pi] \text{ et } \forall n \geq n_0.$$

On obtient en effet

$$\frac{\cosh((\pi - y)\alpha_n)}{\sinh(\pi\alpha_n)} = \frac{e^{(\pi - y)\alpha_n}\left(1 + e^{-2(\pi - y)\alpha_n}\right)}{e^{\pi\alpha_n}\left(1 - e^{-2\pi\alpha_n}\right)} = \frac{e^{-\alpha_n y}\left(1 + e^{-2(\pi - y)\alpha_n}\right)}{1 - e^{-2\pi\alpha_n}}$$

et donc (se rappeler que $\pi - y > 0$)

$$\frac{\cosh((\pi - y)\alpha_n)}{\sinh(\pi\alpha_n)} \leq \frac{2}{1 - e^{-2\pi\alpha_n}} e^{-\alpha_n y}.$$

Comme $\alpha_n \to \infty$ on trouve bien

$$0 < \frac{\cosh((\pi - y)\alpha_n)}{\sinh(\pi\alpha_n)} \leq \gamma e^{-\alpha_n y}$$

et finalement comme $y \geq \epsilon > 0$, on a immédiatement l'inégalité souhaitée.

2) Montrons finalement que, quand $c < 1$, $u \in C\left([0,\pi] \times]0,\pi]\right)$. Soit

$$u_N(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{-b_n \cosh\left((\pi - y)\sqrt{n^2 - c}\right)}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right)} \right] \sin(nx).$$

Clairement u_N est continue et pour conclure que u est continue, il suffit de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$u_N \to u \quad \text{uniformément dans } [0,\pi] \times [\epsilon,\pi].$$

On a donc

$$u_N(x,y) - u(x,y) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left[\frac{-b_n \cosh\left((\pi - y)\sqrt{n^2 - c}\right)}{\sinh\left(\pi\sqrt{n^2 - c}\right)} \right] \sin(nx).$$

On déduit alors (en se rappelant que $y \geq \epsilon$) que, pour N suffisamment grand,

$$|u_N(x,y) - u(x,y)| \leq \gamma \sum_{n=N+1}^{+\infty} |b_n| \, e^{-\epsilon\sqrt{n^2-c}}$$

Comme f est continue (il suffit ici de $f \in L^1(\mathbb{R})$) on a de (8) qu'il existe une constante γ_1 telle que

$$|b_n| \leq \frac{\gamma_1}{\sqrt{n^2 - c}}.$$

On a ainsi prouvé que

$$|u_N(x,y) - u(x,y)| \leq \gamma\,\gamma_1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{e^{-\epsilon\sqrt{n^2-c}}}{\sqrt{n^2 - c}}$$

et, par conséquent, la continuité uniforme.

Exercice 9 (7 points). Soient $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $f = -\operatorname{grad} F$. Soit le problème, $y = y(t)$,

$$\begin{cases} y''(t) = f(y(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = y_1 . \end{cases} \tag{10}$$

(i) Discuter l'existence et l'unicité des solutions de (10).

(ii) Soient y une solution de (10) sur un intervalle $]a, b[$ et

$$H(t) = \frac{1}{2}|y'(t)|^2 + F(y(t))$$

où pour $y \in \mathbb{R}^n$ on dénote la norme Euclidienne par $|.|$ à savoir

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

Montrer que H est constante sur $]a, b[$.

(iii) Montrer que, s'il existe une constante M telle que

$$F(y) \geq M \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n,$$

alors la solution de (10) est globale. On pourra procéder par contradiction, tout en utilisant (ii).

Corrigé. **(i)** Le problème peut être réécrit sous forme de système en posant

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

$$x_1 = y, \quad x_2 = y' \quad \text{et} \quad g(x) = (x_2, f(x_1)) .$$

On a ainsi

$$\begin{cases} x'(t) = g(x(t)) \\ x(0) = (y_0, y_1) . \end{cases}$$

On note que $g \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et est donc localement Lipschitzienne; par conséquent (grâce au théorème de Picard) la solution existe et est unique dans un intervalle maximal un intervalle $]a, b[$.

(ii) En dérivant H et en utilisant (10), on trouve immédiatement que

$$\frac{d}{dt}H(t) = \langle y'(t)\,; y''(t)\rangle + \langle \operatorname{grad} F(y(t))\,; y'(t)\rangle = 0.$$

(iii) On sait qu'il existe une solution $y \in C^2(]a, b[\,; \mathbb{R}^n)$ définie sur un intervalle ouvert maximal $]a, b[$. Montrons que $a = -\infty$ et $b = +\infty$. On va montrer seulement que $b = +\infty$ (le fait que $a = -\infty$ est établi de manière totalement analogue). Supposons par l'absurde que $b < +\infty$. Alors on sait par un théorème du cours qu'il existe une suite $t_n \to b$ telle que

$$|x(t_n)|^2 = |y(t_n)|^2 + |y'(t_n)|^2 \to +\infty. \tag{11}$$

Comme $F(y) \geq M$, on a que

$$\frac{1}{2}\left|y'(t)\right|^2 + M \leq \frac{1}{2}\left|y'(t)\right|^2 + F(y(t))$$

et comme par (ii) on sait que

$$\frac{1}{2}\left|y'(t)\right|^2 + F(y(t)) = \frac{1}{2}\left|y'(0)\right|^2 + F(y(0)) = \frac{1}{2}\left|y_1\right|^2 + F(y_0),$$

on déduit que

$$\frac{1}{2}\left|y'(t)\right|^2 \leq \frac{1}{2}\left|y_1\right|^2 + F(y_0) - M$$

et donc il existe une constante γ telle que

$$\left|y'(t)\right| \leq \gamma \quad \forall\, t \in [0, b[\ .$$

On infère, par conséquent, que

$$\left|y(t) - y_0\right| = \left|\int_0^t y'(t)\right| \leq \gamma\, t \quad \forall\, t \in [0, b[\ .$$

On a donc obtenu que

$$\limsup_{t_n \to b} \left|x(t_n)\right|^2 = \limsup_{t_n \to b} \left[\left|y(t_n)\right|^2 + \left|y'(t_n)\right|^2\right] \leq \left(\left|y_0\right| + \gamma\, b\right)^2 + \gamma^2$$

ce qui contredit (11) et le fait que $b < +\infty$.